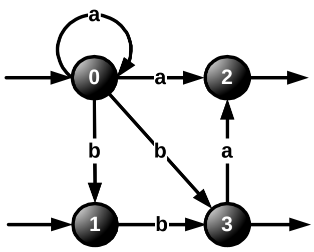
SOLUTIONS

Exercice 1

Trouver, en utilisant obligatoirement les techniques apprises en cours et en TD (des équations), une expression rationnelle correspondant au langage reconnu par l’automate suivant :



Solution

‘X’ étant l’expression décrivant les chaînes reconnues pour aller d’un état initial à l’état ‘X’, on a :

$0 = \varepsilon + 0a$ (1) $\Rightarrow 0 = \varepsilon a^* = a^*$

$1 = \varepsilon + 0b$ (2) $\Rightarrow 1 = \varepsilon + a^*b$

$2 = 0a + 3a$ (3)

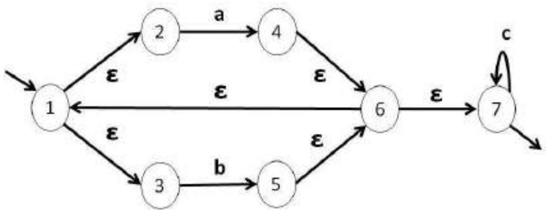
$3 = 1b + 0b$ (4) $\Rightarrow 3 = b + a^*bb + a^*b$

$\Rightarrow 2 = a^*a + ba + a^*bba + a^*ba$

Le langage reconnu par l’automate est $L = 2 + 3 = a^*a + ba + a^*bba + a^*ba + b + a^*bb + a^*b$

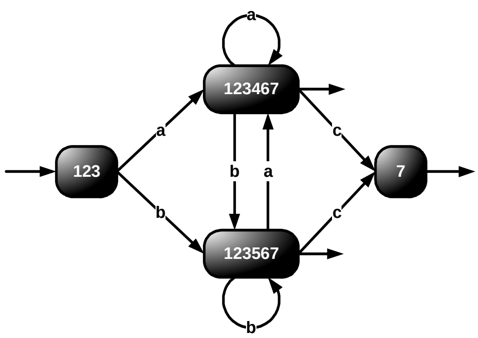
Exercice 2

Déterminiser l’automate suivant, en utilisant les techniques de déterminisation d’automates asynchrones (et non pas en écrivant le résultat qui vous semble bon intuitivement) :



Solution

	Etat	a	b	c
I	1 2 3	1 2 3 4 6 7	1 2 3 5 6 7	--
T	1 2 3 4 6 7	1 2 3 4 6 7	1 2 3 5 6 7	7
T	1 2 3 5 6 7	1 2 3 4 6 7	1 2 3 5 6 7	7
T	7	--	--	7



(Automate déterministe non complet)

Ou bien, ce qui est équivalent au nommage des états près :

	Etat	a	b	c
I	1	4	5	--
T	4	4	5	7
T	5	4	5	7
T	7	--	--	7

Exercice 3

Ecrire (dans un langage algorithmique de votre choix à condition qu'il soit compréhensible sans ambiguïté) un algorithme <u>récursif</u> pour obtenir x^n où x est un réel et n un entier positif. Cet algorithme reçoit le réel x et l'entier n en paramètres d'entrée, et retourne la valeur de x^n.
Un algorithme non récursif ne sera pas pris en compte.

Solution par exemple :

```
fonction puissance (x : réel, n : entier) : réel
si (n<0) écrire « nous ne calculons pas des puissances négatives »
sinon    si (n=0)
                 si (x=0) écrire « 0 puissance 0 n'est pas défini »
                 sinon retourner 1
                 finsi
         sinon   si (x=0) retourner 0
                 sinon retourner   x * puissance(x, n-1)
                 finsi
         finsi
finsi
```

Exercice 4

En utilisant l'algorithme d'Euclide, calculez :
a) PGCD(3765, 21) b) PGCD(32576, 61842)
Note : Vous devez fournir le déroulement complet de l'algorithme, et non pas uniquement le résultat.

Solution

3765	=	179	*	21	+	6
21	=	3	*	6	+	3
6	=	2	*	3	+	0

32576	=	0	*	61842	+	32576
61842	=	1	*	32576	+	29266
32576	=	1	*	29266	+	3310
29266	=	8	*	3310	+	2786
3310	=	1	*	2786	+	524
2786	=	5	*	524	+	166
524	=	3	*	166	+	26
166	=	6	*	26	+	10
26	=	2	*	10	+	6
10	=	1	*	6	+	4
6	=	1	*	4	+	2
4	=	2	*	2	+	0

Exercice 5

On a un tas de petits carreaux, et on veut les disposer en un nombre de rectangles identiques. Chaque côté d'un rectangle contient au mois deux carreaux.
Quand on a 1669 carreaux, on réussit à disposer les carreaux en rectangles identiques, à l'exception des 4 derniers du tas. Si on en a 1042, on peut disposer les carreaux en rectangles de même taille, et il reste alors 7 carreaux de trop.
De quelle taille (comptée en nombre de carreaux sur chaque côté) sont les rectangles ? Donner toutes les solutions s'il y en a plusieurs.

Solution : PGCD(1035,1665)=45=3*3*5. Les facteurs communs sont 45, 15, 9, 5, 3. De ces nombres, 5 et 3 ne peuvent pas faire un rectangle ; 45=15*3=9*5 (deux solutions), 15=5*3 (la troisième solution), 9=3*3 (la quatrième).

Exercice 6

Déterminez la décomposition en facteurs premiers de :

a) 8415 b) 18315

Solution : 8415 = 3*3*5*11*17 ; 18315 = = 3*3*5*11*37

Exercice 7

Montrer que pour tout $n \in N^*$, $\prod_{k=1}^{n}(n+k) = 2^n \prod_{k=1}^{n}(2k-1)$.

Solution

Base de la récurrence : $n = 1$ 1+1 = 2 = 2^1(2×1–1). OK.

Le pas de la récurrence :

$$\prod_{k=1}^{n+1}((n+1)+k) = \prod_{k=1}^{n+1}(n+(k+1)) = \prod_{s=2}^{n+2}(n+s) = \left(\prod_{s=1}^{n}(n+s)\right) \times \frac{[n+(n+1)][n+(n+2)]}{n+1}$$

$$= \left(\prod_{s=1}^{n}(n+s)\right) \times \frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1} = \left(\prod_{s=1}^{n}(n+s)\right) \times 2(2n+1)$$

Selon l'hypothèse au rang n, $\prod_{s=1}^{n}(n+s) = 2^n \prod_{k=1}^{n}(2k-1)$ Donc,

$$\prod_{k=1}^{n+1}((n+1)+k) = 2^n \prod_{k=1}^{n}(2k-1) \times 2(2n+1) = 2^{n+1} \prod_{k=1}^{n+1}(2k-1).$$

Question de cours

Soient : $n \in N^*$ et $p \in P^*$ tels que $\mathrm{n} \wedge \mathrm{p} = 1$.

a) Démontrer que les restes de la division euclidienne de n, 2n, 3n, …, (p-1)n par p sont non nuls et distincts deux à deux.

En déduire que : $\mathrm{n}^{\mathrm{p}-1} \equiv 1[\mathrm{p}]$.

b) Démontrer que : $\forall n \in N^*, \quad \forall p \in P^* \quad \mathrm{n}^{\mathrm{p}} \equiv \mathrm{n}[\mathrm{p}]$.

Solution :

a) Considérons la suite des multiples de a : a, 2a, 3a, ... , (p - 1)a. (Appelons-les dans ce qui suit « suite (1)). Le nombre p n'en divise aucun, car sinon, p étant premier avec a, il devrait diviser l'un des nombres: 1, 2, 3, ..., (p - 1) qui lui sont inférieurs. C'est impossible.

Les nombres de la suite (1) divisés par p, donnent donc des restes **non nuls.**

Ces restes sont, en outre, **distincts**. En effet, si deux multiples ka et k'a donnaient le même reste, leur différence ka - k'a = (k - k')a donnerait un reste nul ; or, cette différence est un nombre de la suite (1), et on a montré que les restes ne sont pas nuls.

Ces restes constituent donc, à l'ordre près, les nombres de la suite suivante : 1, 2, 3, 4, ..., p-1 (suite 2). Fin de la preuve de la première assertion du (a).

On sait que si a=a'[m] et b=b'[m], alors ab=a'b'[m].

Donc a×2a×3a× ... × (p - 1)a = 1×2×3× ... × (p - 1)[p]. (Le terme de gauche contient dans un ordre différent des nombres ayant ses contreparties par congruence dans le terme de droite). Donc

$a^{p-1} \times 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (p-1) = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (p-1)[p]$ c'est-à-dire

$1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (p-1)(a^{p-1}-1) =$ un multiple de p

Or, p est premier avec le produit $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (p-1)$.

Donc p divise le nombre a^{p-1}–1. Fin de la preuve de la seconde assertion du (a).

b) Si on multiplie $a^{p-1}-1$ par a, l'expression reste divisible par p : a^p-a est divisible par p. Rappelons qu'il s'agit de a qui est premier avec p. Mais cette condition peut être levé pour a^p-a. Si a et p ne sont plus premier entre eux, p étant premier, cela veut dire que a est divisible par p. Donc a^p l'est aussi, et donc a^p-a.

a^p-a est divisible par p si a est un entier naturel quelconque, et p un nombre premier. Fin de la preuve du (b).