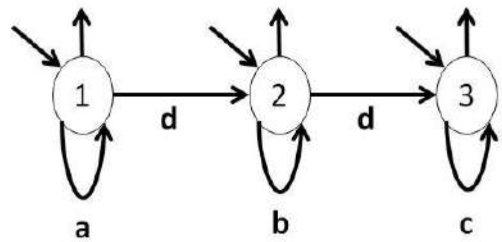
DE 2, Solutions

Exercice 1. Déterminiser et compléter, si besoin est, l'automate suivant



Résultat : un automate déterministe complet sous forme de table de transitions avec l'indication claire des états d'entrée et de sortie.

Solution :

Table de transitions de l'automate initial (ça aide, mais ce n'est pas obligatoire) :

	état	a	b	c	d
E/S	1	1	--	--	2
E/S	2	--	2	--	3
E/S	3	--	--	3	--

Déterminisation :

	état	a	b	c	d
E/S	1 2 3	1	2	3	2 3
S	1	1	--	--	2
S	2	--	2	--	3
S	3	--	--	3	--
S	2 3	--	2	3	3

Complétion (résultat final):

	état	a	b	c	d
E/S	1 2 3	1	2	3	2 3
S	1	1	P	P	2
S	2	P	2	P	3
S	3	P	P	3	P
S	2 3	P	2	3	3
	P	P	P	P	P

Exercice 2

Un commerçant reçoit 90 lampes de poche et 135 piles pour ces lampes. Il souhaite les conditionner en lots identiques composés de lampes et de piles utilisant toutes les lampes et toutes les piles.

1) Quel est le nombre de lots qu'il peut conditionner ainsi ? S'il y a plusieurs solutions, donnez-les toutes, et dites quel est le nombre maximal de lots qu'il peut conditionner ainsi.

2) Chaque lampe utilise une pile. Combien y aura-t-il de pile(s) de rechange dans chaque lot (réponse séparée pour chaque solution s'il y en a plusieurs) ?

Solution :

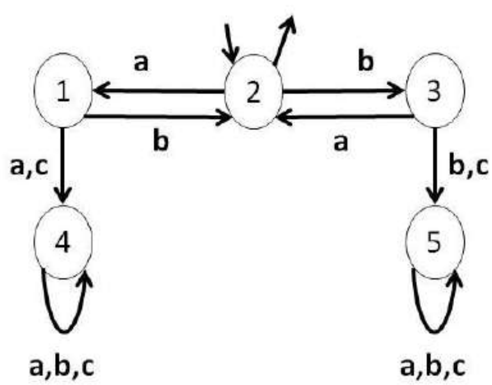
Soit *n* le nombre de lots, chaque lot contenant *q* lampes et *p* piles. Alors il y a au total *nq* lampes et *np* piles : *nq* = 90, *np* = 135. Donc *n* est un diviseur commun de 90 et 135. Tout diviseur commun de deux entiers est diviseur de leur PGCD. Or, 90 ^ 135 = 45, et les diviseurs de 45 sont 1, 3, 5, 9, 15, 45.

1) Les solutions sont donc :	2) nombre de piles de rechange par lot, par solution :
a) 1 lot de 90 lampes et 135 piles chacun	45
b) 3 lots de 30 lampes et 45 piles chacun	15
c) 5 lots de 18 lampes et 27 piles chacun	9
d) 9 lots de 10 lampes et 15 piles chacun	5
e) 15 lots de 6 lampes et 9 piles chacun	3
f) 45 lots de 2 lampes et 3 piles chacun	1

Le nombre maximal de lots est la solution (f), c.à.d. 45 lots de 2 lampes et 3 piles.

Exercice 3

Minimiser l'automate suivant, en détaillant le processus de minimisation (partitions successives) et sans aucune transformation intuitive préalable. Le résultat est attendu sous forme de schéma.



Solution :

Table de transitions de l'automate initial :

	état	a	b	C
E/S	2	1	3	--
	1	4	2	4
	3	2	5	5
	4	4	4	4
	5	5	5	5

Après l'avoir complété :

	état	a	b	c
E/S	2	1	3	P
	1	4	2	4
	3	2	5	5
	4	4	4	4
	5	5	5	5
	P	P	P	P

Partition initiale Θ_0={T, NT} où T={2}, NT={1,3,4,5,P}. L'état 2 reste seul, et pour les autres états :

				Sous Θ_0		
1	4	2	4	NT	T	NT
3	2	5	5	T	NT	NT
4	4	4	4	NT	NT	NT
5	5	5	5	NT	NT	NT
P	P	P	P	NT	NT	NT

Nous avons 3 motifs ; donc Θ_1={2, 1, 3, {4,5,P}}. Appelons le groupe {4,5,P}=45P.

				Sous Θ_1		
4	4	4	4	45P	45P	45P
5	5	5	5	45P	45P	45P
P	P	P	P	45P	45P	45P

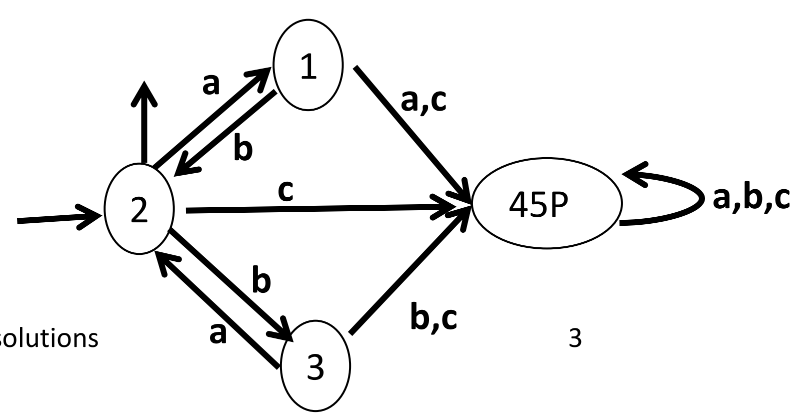
Il n'y a plus aucune séparation ; Θ_1=Θ_{fin}={2, 1, 3, {45P}}, la minimisation est terminée.

L'automate minimisé :

	état	a	b	C
E/S	2	1	3	45P
	1	45P	2	45P
	3	2	45P	45P
	45P	45P	45P	45P

L'état (45P) sert d'une poubelle.

Le schéma ::

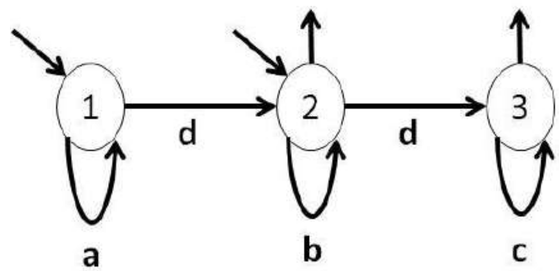


Remarque

Il y a un bon nombre de personnes qui n'ont pas jugé utile de compléter l'automate avant de le minimiser. **On ne minimise pas un automate non complet, cela peut facilement mener à une erreur.** Dans la plupart des cas, cela a effectivement mené à une erreur : l' « automate minimal » devient un « faux complet », possédant un faux état poubelle car dans ces solutions, il n'y a pas de transition 2.c.(45) (mon état (45P) étant, chez eux, remplacé par (45)).

Exercice 4

a) Donner les équations initiales, permettant de trouver l'expression rationnelle correspondant au langage reconnu par l'automate ci-dessous. Donner l'expression du langage reconnu par l'automate en termes des expressions rationnelles correspondant aux états.



b) Résoudre ce système d'équation et obtenir le langage reconnu par l'automate.

Solution :

Méthode 1 : la méthode donnée en cours et utilisée en TD avec les groupes C et D, dite "de l'arrivée", donne les équations suivantes, dans lesquelles 1, 2 et 3 sont les expressions rationnelles correspondant aux ensembles de mots qui peuvent arriver dans les états 1, 2 et 3, à partir d'une entrée quelconque ::

a) $1 = \varepsilon + 1a$ (eq. 1) (ε correspond à une entrée)
$2 = \varepsilon + 1d + 2b$ (eq. 2) (ε correspond à une entrée)
$3 = 2d + 3c$ (eq. 3)

Le langage reconnu L = 2 + 3.

b) Résolution du système :

Eq. 1 résulte, en utilisant le lemme d'Arden $X=XY+Z \Leftrightarrow X=ZY^*$ avec X=1, Y=a, Z=ε, en
$1 = \varepsilon a^* = a^*$.

Remplaçant 1 dans eq. 2, on obtient
$2 = \varepsilon + a^*d + 2b$, et en utilisant le lemme d'Arden avec X=2, Y=b, Z=$\varepsilon + a^*d$, on obtient
$2 = (\varepsilon + a^*d)b^* = b^* + a^*db^*$.

Remplaçant 2 dans eq. 3, on obtient
$3 = b^*d + a^*db^*d + 3c$, et en utilisant le lemme d'Arden avec X=3, Y=c, Z= $b^*d + a^*db^*d$,

on obtient

3 = (b*d + a*db*d)c* = b*dc* + a*db*dc*.

Le langage reconnu par l'automate est L = b* + a*db* + b*dc* + a*db*dc* .

Si l'on désire, on peut écrire cette expression comme (b* + a*db*)(ε + dc*).

Méthode 2 :

Il existent d'autre méthodes, parmi lesquelles celle utilisée en TD avec les groupes A et B. Ici, Xij est l'expression rationnelle correspondant à l'ensemble des mots qui peuvent passer de l'état i à l'état j. Alors, les équations deviennent ainsi (nous n'avons pas besoin d'expliciter tous les Xij):

a) X11 = X11a + ε (eq 1)

X12 = X11 d + X12 b (eq 2)

X13 = X12 d + X13 c (eq 3)

X22 = X22 b + X21 d + ε (eq 4)

X23 = X22 d + X23 c (eq 5)

avec le langage reconnu L = X12 + X13 + X22 + X23, ce qui correspond à toutes les possibilité de passer d'une entrée à une sortie.

b) Résolution du système :

(eq 1) X11 = εa*=a*

(eq 2) ==> X12 = a*d + X12 b = a*db*

(eq 3) ==> X13 = a*db*d + X13 c = a*db*dc*

(eq 4) <==> X22 = X22 b + ε car X21 n'est pas possible (pas de chemin de '2' à '1'

==> X22 = εb*=b*

(eq 5) ==> X23 = b*d + X23 c = b*dc*

D'où L = a*db* + a*db*dc* + b* + b*dc*

Remarque. *Nous avons obtenu deux expressions rationnelles identiques avec les deux méthodes ; ceci aurait pu ne pas avoir lieu, car deux expressions rationnelles peuvent bien être égales (équivalentes) sans forcément que leurs écritures se ressemblent.*

Exercice 5

Décomposer en facteurs premiers les nombres suivants : 83160 et 2646.

Solution : $83160=2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11$; $2646= 2 \times 3^3 \times 7^2$.

Exercice 6

Soit les nombres suivants :

$a = 2^3 \text{ x } 3^2 \text{ x } 7^4 \text{ x } 11$

$b = 2 \text{ x } 3^3 \text{ x } 5 \text{ x } 11 \text{ x } 13^2$

Quel est leur PGCD ? Expliquez !

Solution : Le PGCD est le produit des puissances minimales de chaque facteur premier commun :

$a \wedge b = 2 \text{ x } 3^2 \text{ x } 11 = 198$.

Exercice 7

Appliquez la méthode d'Euclide pour trouver le PGCD des deux nombres suivants :

a = 1 901 592, b = 1 003 860

Votre réponse doit impérativement inclure le résultat ainsi que le déroulement complet, étape après étape, de la méthode d'Euclide.

Solution :

1901592	=	1003860	*	1	+	897732
1003860	=	897732	*	1	+	106128
897732	=	106128	*	8	+	48708
106128	=	48708	*	2	+	8712
48708	=	8712	*	5	+	5148
8712	=	5148	*	1	+	3564
5148	=	3564	*	1	+	1584
3564	=	1584	*	2	+	396
1584	=	396	*	4	+	0

Donc, le PGCD est 396.

Questions de cours

a) Comment peut-on résoudre l'équation ci-dessus pour obtenir l'expression rationnelle X explicite en termes des caractères {a,b,c} ?

$X = Xab + abc$

Réponse :

En utilisant le lemme d'Arden : $X = XY + Z \Leftrightarrow X = ZY^*$ si $\varepsilon \notin Y$,

$X = abc(ab)^*$.

b) Même question pour l'obtention de l'expression rationnelle Y de l'équation suivante :

$Y = Ya^* + b$

Expliquez votre réponse.

Réponse :

$\varepsilon \in a^*$, donc le lemme d'Arden n'est pas applicable. En fait, ici la solution est A^* , ce qui est évident du fait que $\forall X \in A^*$, $A^*X=A^*$ et $A^*+X = A^*$.

c) Comment peut-on transformer un automate asynchrone en un automate synchrone (n'ayant pas de transitions ε) en utilisant une méthode « automatique », c'est-à-dire programmable ?

Réponse : En le déterminisant.