

**DE de rattrapage : Mathématiques pour l'informatique**

*Sans documents, sans calculatrice. Tout raisonnement doit être explicité.*

**Solutions**

**I. Automates**

**Exercice 1.** Déterminer et compléter si besoin est l'automate suivant :

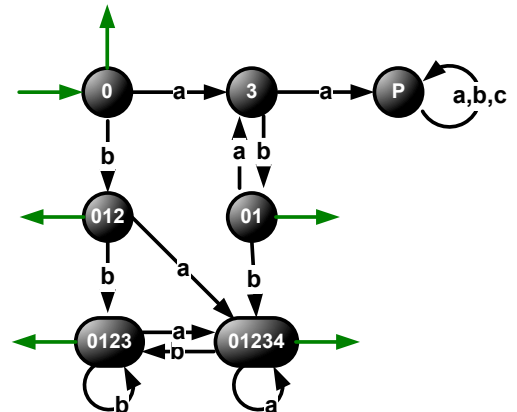
	Etat	a	b
E/S	0	3	0,2
	1	-	1,2,3
	2	0,1,2	4
E	3	-	0,1
S	4	-	4

(E – état initial, ou « d'entrée », S – état terminal, ou « de sortie »).

Résultat demandé : un automate déterministe complet sous forme de table de transitions (dessiner le schéma uniquement s'il n'est pas trop complexe) en indiquant clairement les états d'entrée et de sortie.

**Solution**

	état	a	b
E,S	0 3	3	0 1 2
	3	P	0 1
S	0 1 2	0 1 2 3	0 1 2 3 4
S	0 1	3	0 1 2 3
S	0 1 2 3	0 1 2 3	0 1 2 3 4
S	0 1 2 3 4	0 1 2 3	0 1 2 3 4
	P	P	P



**Exercice 2**

- a) Standardiser le même automate que celui donné ci-dessus à l'exercice 1. Vous pouvez si vous voulez donner le résultat sous forme de tableau, n'oubliant pas d'indiquer tous les états d'entrée et de sortie.

**Solution**

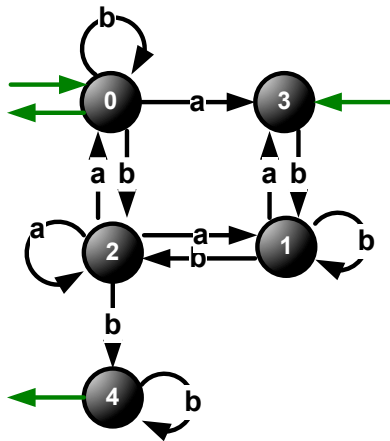
Les transitions ayant une entrée comme état source : 0a3, 0b0, 0b2, 3b0, 3b1. On ajoute un nouvel état d'entrée i qui est un état terminal parce qu'il y avait un état E/S dans l'automate d'origine (état 0), les états 0 et 3 cessent d'être des entrées, et on ajoute les transitions avec i comme source :

0a3, 0b0, 0b2, 3b0, 3b1 → ia3, ib0, ib2, ib0, ib1 ; la transition ib0 y figure deux fois mais c'est la même transition.

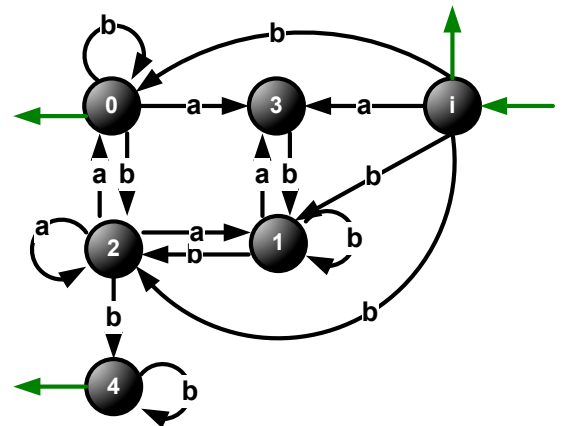
La table de transitions de l'automate standardisé devient donc

	Etat	a	b
S	0	3	0,2
	1	-	1,2,3
	2	0,1,2	4
	3	-	0,1
S	4	-	4
E,S	i	3	0,1,2

Graphiquement, l'automate d'origine :



L'automate standardisé :



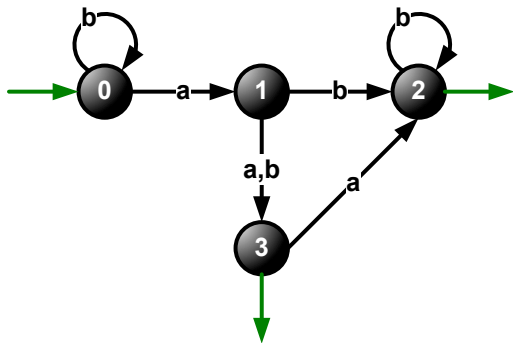
- b) Est-ce que votre automate standardisé reconnaît le mot vide ? (Expliquer la réponse !).  
 Si la réponse est « oui », donner un automate reconnaissant le même langage à l'exception du mot vide.  
 Si elle est « non », donner un automate reconnaissant le même langage plus le mot vide.

**Solution**

L'automate reconnaît le mot vide car l'état i est à la fois initial et terminal. Pour qu'il ne reconnaisse pas le mot vide, il faut enlever la sortie de l'état i.

**Exercice 3**

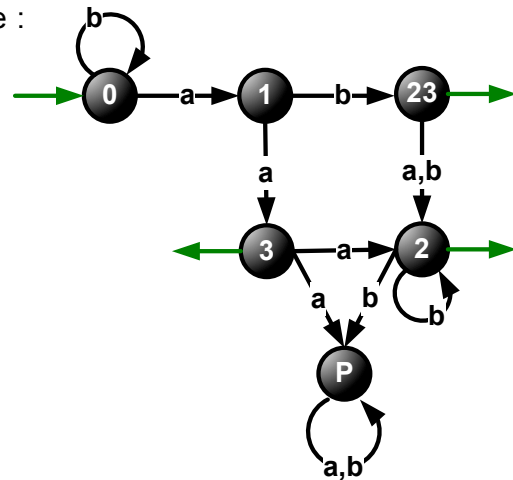
Construire un automate reconnaissant le complément du langage reconnu par l'automate ci-dessous.



**Solution**

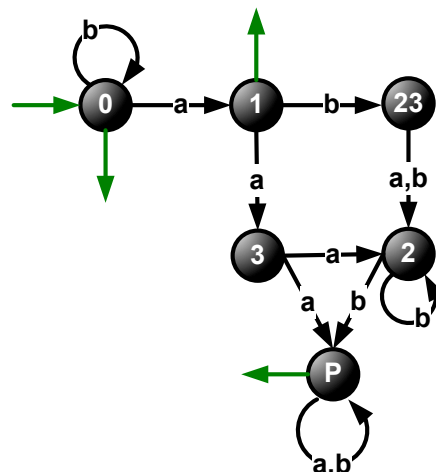
Il faut d'abord déterminer et compléter l'automate :

		a	b
E	0	1	0
S	1	3	2 3
S	3	2	P
S	2 3	2	2
S	2	P	2
	P	P	P



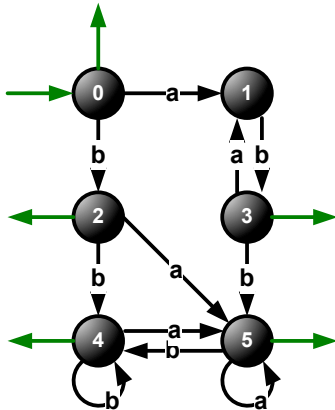
Puis, on échange les états terminaux et non terminaux :

		a	b
E/S	0	1	0
S	1	3	2 3
S	3	2	P
S	2 3	2	2
S	2	P	2
S	P	P	P



**Exercice 4**

Minimiser l'automate suivant, en détaillant le processus de minimisation (écrire explicitement les partitions successives  $\Theta_i$  et ce qui se passe à chaque itération). Le résultat est attendu sous forme d'un schéma.



**Solution**

Il faut compléter l'automate avant de le déterminer. On peut remarquer qu'on obtient l'automate déterministe de l'exo 1 avec les noms d'états modifiés :

		a	b
E/S	0	1	2
	1	P	3
S	2	5	4
S	3	1	5
S	4	5	4
S	5	5	4
	P	P	P

La partition initiale  $\Theta_0 = \{T, NT\} = \{(0, 2, 3, 4, 5), (1, P)\}$ .

Itération 1 :

		a	b	sous $\Theta_0$		
	0	1	2	NT	T	
	2	5	4	T	T	séparation en 2 groupes
T	4	5	4	T	T	
	5	5	4	T	T	
	3	1	5	NT	T	
NT	1	P	3	NT	T	séparation

P	P	P	NT	NT
---	---	---	----	----

$$\Theta_1 = \{(0,3), (2,4,5), 1, P\}$$

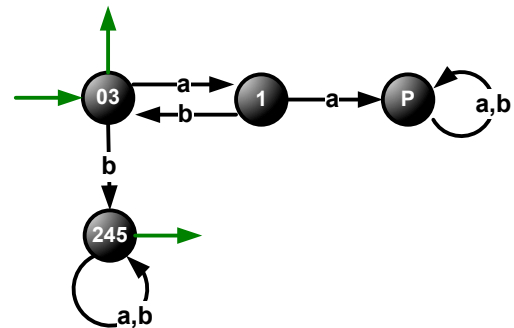
Itération 2 :

	a	b	sous $\Theta_1$			
03	0	1	2	1	245	pas de séparation
	3	1	5	1	245	
245	2	5	4	245	245	pas de séparation
	4	5	4	245	245	
	5	5	4	245	245	

Donc  $\Theta_2 = \Theta_1 = \{(0,3), (2,4,5), 1, P\} = \Theta_{fin}$ .

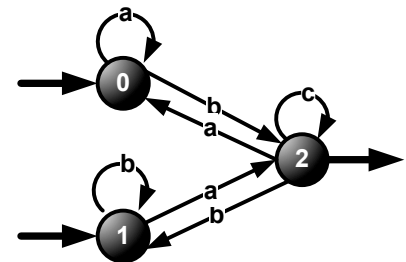
L'AM devient :

E/S	a	b
03	1	245
1	P	03
245	245	245
P	P	P



**Exercice 5**

- a) Donner le système d'équations permettant de trouver l'expression rationnelle correspondant au langage reconnu par l'automate ci-contre. Donner l'expression du langage reconnu par l'automate en termes des expressions rationnelles  $X_0, X_1$  et  $X_2$  (que vous pouvez noter 0, 1 et 2 si vous préférez) correspondant aux états.



**Solution**

(Eq.1)  $X_0 = \epsilon + X_0a + X_2a$

(Eq.2)  $X_1 = \epsilon + X_1b + X_2b$

(Eq.3)  $X_2 = X_0b + X_1a + X_2c$

**$L = X_2$**

- b) Obtenir le langage reconnu par l'automate en résolvant le système d'équations que vous avez obtenu.

**Solution :**

$$X_0 = \epsilon + X_0a + X_2a = (\epsilon + X_2a)a^* = a^* + X_2aa^*$$

$$X_1 = \epsilon + X_1b + X_2b = (\epsilon + X_1b)b^* = b^* + X_2bb^*$$

Remplaçant dans Eq. 3, on obtient

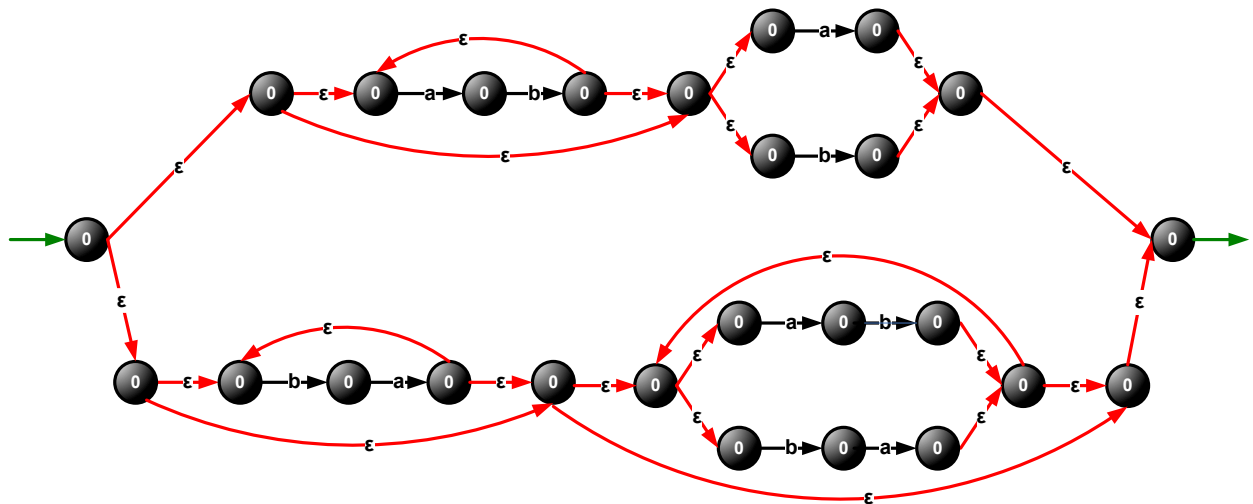
$$\begin{aligned} L = X_2 = X_0b + X_1a + X_2c &= (a^* + X_2aa^*)b + (b^* + X_2bb^*)a + X_2c \\ &= a^*b + X_2aa^*b + b^*a + X_2bb^*a + X_2c \\ &= (a^*b + b^*a) + X_2(aa^*b + bb^*a + c) \\ &= (a^*b + b^*a)(aa^*b + bb^*a + c)^* \end{aligned}$$

**Exercice 6**

a) Soit l'expression rationnelle :  $L = (ab)^*(a+b) + (ba)^*(ab+ba)^*$ .

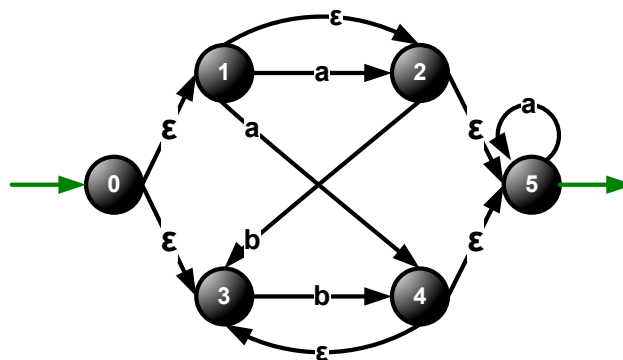
Dessiner un automate asynchrone suivant exactement les règles données dans le cours.

**Solution**



Où je n'ai pas numéroté les états car nous ne faisons aucune autre opération avec cet automate.

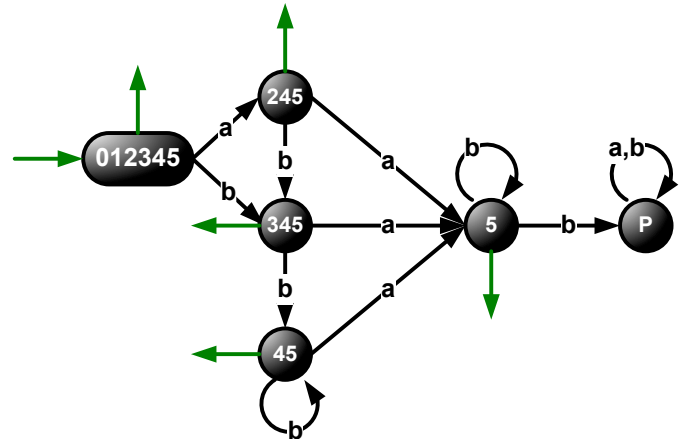
b) Déterminer l'automate asynchrone suivant :



**Attention !** Les flèches  $1\epsilon 2$  et  $4\epsilon 3$  sont dirigées différemment, une vers la droite et l'autre vers la gauche !

**Solution :**

		a	b
E/S	0 1 2 3 4 5	2 4 5	3 4 5
S	2 4 5	5	3 4 5
S	3 4 5	5	4 5
S	4 5	5	4 5
S	5	5	P
	P	P	P



### Arithmétique

#### Exercice 7

Un centre aéré organise une sortie à la mer pour 315 enfants accompagnés de 42 adultes. Comment peut-on les diviser en groupes (il faut qu'il y ait plus d'un seul groupe) comportant chacun le même nombre d'enfants et d'accompagnateurs (donner toutes les solutions possibles) ?

#### Solution

Le nombre de groupes doit être diviseur de 315 et de 42 ;  $PGCD(315,42)=21$ . Donc le nombre de groupes doit être un diviseur de 21 : 21, 7, 3, 1. Nous avons exclu le choix de 1 seul groupe. Voici les solutions :

- a) 21 groupes de  $(315/21=15)$  enfants et  $(42/21=2)$  adultes ;
- b) 7 groupes de  $(315/7=45)$  enfants et  $(42/7=6)$  adultes ;
- c) 3 groupes de  $(315/3=105)$  enfants et  $(42/3=14)$  adultes ;

#### Exercice 8

- a) Soit les nombres suivants :  $a = 2^{10} \times 3^5 \times 5^3 \times 11 \times 17^4$ ,  $b = 2^5 \times 3^5 \times 5^5 \times 11 \times 13 \times 17$   
 Quel est leur PGCD ? Expliquez !

#### Solution

Le PGCD est le produit des puissances minimales de chaque diviseur premier.

$$PGCD(a,b)=2^5 \times 3^5 \times 5^3 \times 11 \times 17.$$

- b) Appliquez la méthode d'Euclide pour trouver le PGCD des deux nombres suivants :

$$a = 1239, \quad b = 123$$

Votre réponse doit impérativement inclure le résultat ainsi que le déroulement complet, étape après étape, de la méthode d'Euclide.

### Solution

$$1239 = 123 * 10 + 9$$

$$123 = 9 * 13 + 6$$

$$9 = 6 * 1 + 3$$

$$6 = 3 * 2 + 0$$

Le PGCD est 3.