Mathématiques pour l'informatique
TD 1
Récursion et induction.

Exercice 1

En utilisant la convention $\forall r \in \mathbf{R}$, $r_0 = 1$, montrer par récurrence que

a) $\forall r \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}$,

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} r^i = \begin{cases} n+1 & \text{si } r = 1 \\ (r^{n+1} - 1)/(r - 1) & \text{si } r \neq 1 \end{cases}$$

b) $\forall r \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}$,

$$T_n = \sum_{i=0}^{n} ir^i = \begin{cases} n(n+1)/2 & \text{si } r = 1 \\ (nr^{n+2} - (n+1)\, r^{n+1} + r)/(r - 1)^2 & \text{si } r \neq 1 \end{cases}$$

Exercice 2

a) Montrer que $\forall n \geq 1$, $S_n = 1^3 + 3^3 + \ldots + (2n - 1)^3 = 2n^4 - n^2$
b) Calculer

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} 1/(4k^2 - 1) \text{ pour tout } n \geq 1$$

Exercice 3

On considère le polynôme à coefficients réels $P(x) = 1/3\ x^3 + ax^2 + bx$.

a) Trouver a et b pour que $\forall x \in \mathbf{R}$, $P(x+1) - P(x) = x^2$. On suppose dans la suite que cette propriété est vérifiée.
b) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}$, $P(n)$ est un entier.
c) $\forall n \geq 0$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} = k^2$. Montrer que
   $\forall n \geq 0$, $S_n = P(n+1) = n(n+1)(2n+1)/6$

Notation On écrira $p \mid n$ pour noter que p divise n, pour p et n deux entiers.

Exercice 4

Soit $n \geq 1$ et soit $A \subset \{1, 2, \ldots, 2n\}$ tel que $|A| \geq n + 1$. Montrer qu'il existe deux entiers distincts a et b dans A tels que $a \mid b$.

Un peu d'algorithmique…

Exercice 5

Ecrire un algorithme pour résoudre le problème des tours de Hanoi à n disques.

Exercice 6

Le triangle de Pascal est le tableau des coefficients qui sont utilisés pour le développement de certaines expressions comme $(a+b)^2$ ou $(a+b)^n$.
Cela s'appelle la "formule du binôme de Newton". Les coefficients s'appellent les "coefficients binomiaux" ou "coefficients du binôme".
Ce triangle est le suivant :
0 : 1 (a+b)0 = 1
1 : 1 1 (a+b)1 = 1*a + 1*b
2 : 1 2 1 (a+b)2 = 1*a2 + 2*a*b + 1*b2
3 : 1 3 3 1 (a+b)3 = 1*a3 + 3*a²*b + 3*a*b² + 1*b3
4 : 1 4 6 4 1 (a+b)4 = 1*a4 + 4*a3*b + 6*a²*b² + 4*a*b3 + 1*b4
On obtient chaque coefficient en additionnant le nombre qui lui est situé au-dessus ainsi que celui qui lui est situé au-dessus à gauche.
Exemples :
- on obtient le 6 en faisant 3+3
- on obtient le 4 qui est après le 6 en faisant 3+1.
Le numéro qui est en tête de chaque ligne de ce triangle est la puissance à laquelle "a+b" est élevé; ainsi pour la puissance 4,"$(a+b)^4$" admet les coefficients 1, 4, 6, 4, 1 qu'on voit dans l'expression développée.

Ecrire un algorithme pour afficher le triangle de Pascal

Exercice 7

Le **problème des huit dames** (parfois dit à tort **problème des huit reines**), est de placer huit dames d'un jeu d'échec sur un échiquier de 8×8 cases sans que les dames ne puissent se menacer mutuellement, conformément aux règles du jeu d'échecs (la couleur des pièces étant ignorée.) Par conséquent, deux dames ne devraient jamais partager la même rangée, colonne, ou diagonale.

Ecrire un algorithme récursif pour résoudre ce problème.

Exercice supplémentaire

Evaluation d'un nombre écrit en chiffres romains

Ecrire un algorithme permettant d'évaluer un nombre romain.

Auparavant on va introduire les chiffres romains:

M = 1000

D = 500

C = 100

L =   50

X =   10

V =   5

I =   1

On constate que les nombres s'arrêtaient au milliers; cela montre le progrès des mathématiques depuis le temps des romains.

L'écriture des nombres romains

1 s'écrit I.

2 s'écrit II.

3 s'écrit III.

4 s'écrit IV.

5 s'écrit V.

6 s'écrit VI.

7 s'écrit VII.

8 s'écrit VIII.

9 s'écrit IX.

10 s'écrit X.

Tous les nombres finissant par 1,2 ou 3 se terminent dans l'écriture romaine par I,II ou III. Idem pour 6,7 ou 8.

Ceci est valable aussi bien pour les unités, comme on vient de le voir que pour les dizaines et les centaines; ainsi 30 s'écrit XXX, 300 s'écrit CCC.

Tous les nombres finissant par 4, se terminent dans l'écriture romaine par IV.

Tous les nombres finissant par 9, se terminent dans l'écriture romaine par IX. Ainsi 49 se termine par IX, et il s'écrit XLIX.

Identiquement, les nombres finissant par 90 se terminent dans l'écriture domaine par XC.

15 s'écrit XV.

47 s'écrit XLVII.

97 s'écrit XCVII.

14 s'écrit XIV.

149 s'écrit CXLIX (et non CIL, comme on pourrait le penser)

On constate ici la décomposition 100+40+9 = C + XL + IX

1490 s'écrit MCDXC = 1000 + 400 + 90 = M + CD + XC

1900 s'écrit MCM = 1000+900 = M + CM.

1990 s'écrit MCMXC (et non MXM, comme on pourrait le penser)

1000+900+90 = M + CM + XC

1999 = MCMXCIX

Observations

Soit deux chiffres romains. Si le premier chiffre a une valeur inférieure au deuxième, alors on le soustrait de la valeur de tout le reste, sinon on l'additionne à la valeur de tout le reste.

```
En effet, étudions cela sur un exemple :
MCMXCIX.
|On est sur le premier M.
|Son successeur est C, il est plus petit, donc notre résultat final sera la
|valeur de M (1000) plus la valeur du reste (CMXCIX).
|  La valeur du reste est la suivante :
|  C est plus petit que M (une soustraction aura lieu) donc la valeur de
|  CMXCIX est égale à la valeur de MXCIX moins la valeur de C
|  |   La valeur de MXCIX est la suivante :
|  |   |M est plus grande que X donc on a 1000+valeur(XCIX).
|  |   |   La valeur de XCIX est égale à la valeur de CIX moins la valeur de X
|  |   |   |car le premier X est plus petit que son successeur.
|  |   |   |   La valeur de CIX est égale à 100 + valeur(IX) car C est plus
|  |   |   |   |grand que I.
|  |   |   |   |    La valeur de IX est égale à la valeur de X moins la valeur
|  |   |   |   |    de I, soit 10-1 = 9.
|  |   |   |   CIX = C + 9 = 109
|  |   |   XCIX = CIX - X = 109 - 10 = 99
|  |   MXCIX = M + XCIX = 1000 + 99 = 1099
|  CMXCIX = MXCIX - C = 1099 - 100 = 999
MCMXCIX = 1000 + 999 = 1999
```