EFREI
ÉCOLE D'INGÉNIEUR

Mathématiques pour l'Informatique
TD 1
Récursion et induction.

Exercice 1

En utilisant la convention $\forall r\in \mathbf{R}$, $r^0 = 1$, montrer par récurrence que

a) $\forall r\in \mathbf{R}$, $\forall n\in \mathbf{N}$,

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} r^i = \begin{cases} n+1 & \text{si } r = 1 \\ (r^{n+1} - 1)/(r - 1) & \text{si } r\neq 1 \end{cases}$$

b) $\forall r\in \mathbf{R}$, $\forall n\in \mathbf{N}$,

$$T_n = \sum_{i=0}^{n} ir^i = \begin{cases} n(n+1)/2 & \text{si } r = 1 \\ (nr^{n+2} - (n+1)\, r^{n+1} + r)/(r - 1)^2 & \text{si } r\neq 1 \end{cases}$$

Exercice 2

a) Montrer que $\forall n \geq 1$, $S_n = 1^3 + 3^3 + \ldots + (2n - 1)^3 = \boxed{2n^4 - n^2}$ dvlopper

b) Calculer

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} 1/(4k^2 - 1) \text{ pour tout } n \geq 1$$

Exercice 3

On considère le polynôme à coefficients réels $P(x) = 1/3\, x^3 + ax^2 + bx$.

a) Trouver a et b pour que $\forall x\in \mathbf{R}$, $P(x+1) - P(x) = x^2$. On suppose dans la suite que cette propriété est vérifiée.

b) Montrer que $\forall n\in \mathbf{N}$, $P(n)$ est un entier.

c) $\forall n \geq 0$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$. Montrer que

$\forall n \geq 0$, $S_n = P(n+1) = n(n+1)(2n+1)/6$

Notation On écrira p | n pour noter que p divise n, pour p et n deux entiers.

Un peu d'algorithmique…

Exercice 5

Ecrire un algorithme pour résoudre le problème des tours de Hanoi à n disques.

CHDL

CAA
CEA

Exercice 6 - supplémentaire

Le triangle de Pascal est le tableau des coefficients qui sont utilisés pour le développement de certaines expressions comme $(a+b)^2$ ou $(a+b)^n$.
Cela s'appelle la "formule du binôme de Newton". Les coefficients s'appellent les "coefficients binomiaux" ou "coefficients du binôme".
Ce triangle est le suivant :

0 : 1 (a+b)0 = 1
1 : 1 1 (a+b)1 = 1*a + 1*b
2 : 1 2 1 (a+b)2 = 1*a2 + 2*a*b + 1*b2
3 : 1 3 3 1 (a+b)3 = 1*a3 + 3*a^2*b + 3*a*b^2 + 1*b3
4 : 1 4 6 4 1 (a+b)4 = 1*a4 + 4*a3*b + 6*a^2*b^2 + 4*a*b3 + 1*b4

On obtient chaque coefficient en additionnant le nombre qui lui est situé au-dessus ainsi que celui qui lui est situé au-dessus à gauche.
Exemples :
- on obtient le 6 en faisant 3+3
- on obtient le 4 qui est après le 6 en faisant 3+1.

Le numéro qui est en tête de chaque ligne de ce triangle est la puissance à laquelle "a+b" est élevé; ainsi pour la puissance 4,"$(a+b)^4$" admet les coefficients 1, 4, 6, 4, 1 qu'on voit dans l'expression développée.

Ecrire un algorithme pour afficher le triangle de Pascal

EFREI
ÉCOLE D'INGÉNIEUR

Mathématiques pour l'Informatique
TD 2
Arithmétique (PGCD, nombres premiers)

Exercice 1

Calculer les PGCD des couples suivants en utilisant l'algorithme d'Euclide :

43	16
44231	2750
6234	3312
87657	44441

Exercice 2

Déterminer deux entiers positifs sachant que leur PGCD vaut 12 et que les quotients successifs de l'algorithme d'Euclide sont 3, 1, 5 et 4.

Exercice 3

Une machine emballe des pièces dans des sacs, toutes identiques, de même que les sacs. La machine remplit les sacs, sauf si elle n'a pas assez de pièces pour le faire. Quand elle emballe 7912 pièces le dernier sac n'est pas rempli et il contient 37 pièces. Quand elle en emballe 59167 le dernier sac n'est toujours pas rempli et cette fois il contient 42 pièces. Combien chaque sac plein contient-il de pièces ?

Exercice 4

Décomposer les nombres suivants en facteurs premiers :
111, 137, 1025, 1111, 5678, 6788, 10001

Exercice 5

Calculer $a \wedge b \wedge c$ dans les cas suivants :

18	^	16	^	12
34	^	128	^	76
122	^	575	^	625

Exercice 6

Ecrire un algorithme permettant de calculer le PGCD de deux nombres entiers par l'algorithme d'Euclide.

Exercice 7 : Nombres premiers - Crible d'Erathosthène

Le but est d'écrire un algorithme qui calcule et affiche les nombres premiers compris entre 1 et n où n est donné par utilisateur. Pour cela, faites un algorithme qui répond au schéma suivant :

Données :	**Calcule_premiers**	Données modifiées
n------------------------------>		
tableau_des_premiers------->		tableau_des_premiers-------
nb_des_premiers------------->		nb_des_premiers-------------

variables locales : est_premier, ...

« **tableau_des_premiers** » doit contenir les nombres premiers compris entre 1 et n (calculé par l'algorithme)
« **nb_des_premiers** » doit contenir le nombre des nombres premiers compris entre 1 et n (calculé par l'algorithme)
« **est_premier** » est un tableau de booléens (à calculer dans l'algorithme) tel que :
est_premier[i] = true si et seulement si i est un nombre premier.

Méthode :
Au départ, le tableau de booléens est initialisé à « vrai », sauf pour la première case car 1 n'est pas premier. Ensuite, on « raye » tous les multiples de 2 en les mettant à « faux » dans le tableau. Puis on cherche l'entier suivant 2 (l'indice) « non rayé » dans le tableau (3 en l'occurrence) et on « raye » tous les multiples de 3. On continue le processus avec 5, etc. A la fin, les cases du tableau (les indices) qui sont restées a « vrai » sont les nombres premiers.
Si on cherche les nombres premiers compris entre 1 et n, il suffit de répéter le processus décrit ci-dessus jusqu'a p tel que p^2 >=n. En effet, un nombre m au delà de p qui est resté « vrai » dans le tableau ne peut être divisé que par q>p, donc m>=q^2>p^2>=n, ce qui ne nous intéresse pas.

Un exemple de résultat : il y a 6 nombres premiers entre 1 et 15
2 3 5 7 11 13

Exercices supplémentaires

Exercice 8
Que peut-on dire d'un nombre qui n'a que 3 diviseurs ?

Exercice 9
Démontrer que le nombre de diviseurs de n est impair ssi n est un carré.

Exercice 10
Soient a et b deux entiers relatifs.

a) Démontrer que $a \wedge b = (a + b) \wedge b$ et que $a \wedge b = (a - b) \wedge b$
b) Démontrer que $a \wedge b = (4a + 7b) \wedge (9a + 16b)$

Exercice 11
Démontrer les affirmations suivantes et vérifier que leur réciproque est vraie.

a) Pour que $2^n - 1$ soit premier il faut que n soit premier.
b) Pour que $2^n + 1$ soit premier il faut que n soit une puissance de 2.

EFREI
ÉCOLE D'INGÉNIEUR

Mathématiques pour l'Informatique
TD 3
Congruences, Théorème de Bézout, Théorème de Fermat

Exercice 1

Résoudre les congruences suivantes :

1. $3x \equiv 7 \pmod{16}$
2. $4x \equiv 9 \pmod{13}$
3. $5x + 7 \equiv 6 \pmod{23}$
4. $2x + 8 \equiv 5 \pmod{33}$

Exercice 2

Calculer u et v pour $47u + 111v = 1$.
Déterminer 1482^1428 et trouver deux entiers u_0 et v_0 tels que : $d = 1482u_0 + 1428v_0$.

Ecrire un algorithme d'Euclide étendu.

Exercice 3

Rappelons que l'inverse modulo b^{-1} de b est le nombre entier tel que $b \cdot b^{-1} \pmod{n} = 1$. Par exemple 7 est l'inverse modulo 9 de 4, car $4 \cdot 7 \pmod{9} = 1$.
Calculer 15^{-1} modulo 26 puis 5^{-1} modulo 8.

Adapter l'algorithme d'Euclide étendu au calcul de l'inverse de b modulo n s'il existe.

Exercice 4

Trouver le reste de $(57383)^{40}$ par 19 en utilisant le théorème de Fermat.

13 26 39 52

4 — 24

$4x \equiv 9 \, [13]$

$3 \times 4x = 3 \times 9 \, [3 \times$