Différentiabilité et différentielles.

I- Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles premières

A un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Définition :

Soit $\vec{a}\,(a, b) \in A$, $\vec{h}\,(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$.

$f : A \to \mathbb{R}$ est dérivable selon $\vec{h}$ en $\vec{a}$ si

$\varphi_{\vec{a},\vec{h}} : t \mapsto f(\vec{a} + t\vec{h}) = f(a + th_1, b + th_2)$

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, est dérivable, càd

si $\exists\, l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a})}{t} = l$.

Exemple :

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \cos x \sin y$

$\vec{a}\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\vec{h}(1, 0)$.

$f(\vec{a} + t\vec{h}) = f((0, \pi/2) + t(1, 0)) = f\left(t, \frac{\pi}{2}\right) = \cos t$

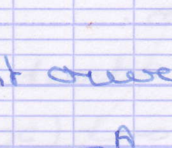
$t \mapsto \cos t$ est bien dérivable donc f est dérivable en $\vec{a}\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ selon $\vec{h}(1, 0)$.

Notation :

Lorsque f est dérivable selon $\vec{h}$ en $\vec{a}$, on note $D_{\vec{h}} f(\vec{a})$ le réel l.

Remarque :

Il faut que A soit ouvert pour parler de $f(\vec{a} + t\vec{h})$.



Définition :

Soit $f : A \to \mathbb{R}$ dérivable en $\vec{\alpha}(a,b)$ selon $\underbrace{(1,0)}_{e^1}$ et selon $\underbrace{(0,1)}_{e^2}$.

① - Dérivée partielle première de f en $\vec{\alpha}(a,b)$:

$$D_{(1,0)} f(\vec{\alpha}) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a,b) = D_1 f(a,b).$$

② Dérivée partielle seconde de f en $\vec{\alpha}$.

$$D_{(0,1)} f(\vec{\alpha}) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a,b).$$

Ex : $f : \mathbb{R}^2 \ \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$

$(x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{2\sqrt{x+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Remarquable.

f admet une dérivée partielle première en $\vec{\alpha}(a,b)$

$\Leftrightarrow$ l'application partielle $f_1 : t \mapsto f(t,b)$ admet.

Idem pour $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$.

Définition :

① Si f admet une dérivée partielle selon $(1,0)$ en tout $(x,y) \in A$ alors $(x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$