Mathématiques du réel

Exemple

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \to \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2}$$

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \to \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\bar{B}(0, r) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \ \|(x, y)\| \leq r \}$$

$$|f(x, y)| \leq r^3 \underset{r \to 0}{\longrightarrow} 0$$

Prop :

1) Si f admet une limite réelle l en (a, b) alors f est bornée au voisinage de (a, b)

2) Si f admet l pour limite en (a, b) et si $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ conv vers (a, b)

alors $(f(x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ conv vers l.

3) Si f est continue en (a, b) et si $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ conv vers (a, b) alors $(f(x_n, y_n))$ conv vers $f(a, b)$

3 Operations algebriques sur les fct continues

Prop : ① Comme pour les fct d'une variable l'ensemble des applications definies sur un ouvert A de $\mathbb{R}^2$ et continue en (a, b) $(a, b) \in A$ est un sous-esp-vect et un sous-anneau de $\mathbb{R}^A$

② Les applications polynomiales

$$(x, y) \to \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x^i y^j$$

sont continues sur $\mathbb{R}^2$

③ Les fractions rationelles (quotients de deux fonctions polynomiales) sont continues sur tout ouvert inclus dans leur ensemble de definition.

4) Generalisation aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$

Def-prop ① $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ admet pour limite $l = (l_1, l_2) \in \mathbb{R}^2$

en (a, b) si $\lim_{(x,y) \to (a,b)} \| f(x, y) - l \| = 0$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists r > 0 \ \forall (x, y) \in A \ \| (x, y) - (a, b) \| \leq r$

$\Rightarrow \| f(x, y) - (l_1, l_2) \| \leq \varepsilon$

(2) Lorsque f est définie en (a,b) et admet l pour limite en (a,b) alors $f(a,b) = l$
on dit f est continue en (a,b)

Prop

(1) Il y a unicité de la limite lorsqu'elle existe

(2) Lorsque f admet $l \in \mathbb{R}^2$ pour limite en (a,b). f est bornée au voisinage de (a,b)

(3) Si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f = l$ et si $(x_n, y_n) \xrightarrow{\text{cv}} (a,b)$

alors $f(x_n, y_n) \to l$

Continuité d'une composée :

Soit $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Si f est continue en (a,b) et g continue en $\underset{f(a,b)}{\overset{=}{v}}$

alors $g \circ f$ est cont en (a,b)

Différentiabilité et différentielles

I Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles premières

A ouvert de $\mathbb{R}^2$ $\qquad f : A \to \mathbb{R}$

Def : Soit $\alpha = (a, b) \in A$ et $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$

On dit que f est dérivable selon h en α

$\iff \varphi_{\alpha,h} : t \rightsquigarrow f((a,b) + t(h_1, h_2))$ est dérivable en $(0,0)$

$\iff \exists\, l \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\, r > 0\ \forall t \in]-r, r[$

$$\left| \frac{f(\alpha + th) - f(\alpha)}{t} - l \right| \leq \varepsilon$$

Lorsque f est dérivable selon h en α

On note $l = D_h f(\alpha)$

Exp : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$\qquad (x, y) \to \sin x \cos y$

$\alpha = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = (a, b) \qquad h = (0, 1) = (h_1, h_2)$

$f((a,b) + t(h_1, h_2)) = f\left(\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) + t(0,1)\right)$
$= f\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = \sin\frac{\pi}{2} \cos t = \cos t$

$f((a,b)) = f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \sin\frac{\pi}{2} \cos 0 = 1$

$$\frac{f((a,b)+t(h_1,h_2))-f(a,b)}{t}$$

$$= \frac{\cos t - 1}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} \sin 0 = 0$$

Def : Soit f dérivable en (a,b)

selon $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$

On appelle première dérivée partielle première def en (a,b) le réel $D_{(1,0)} f(a,b)$

On la note $D_{e_1} f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$

$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a,b)$

$= D_1 f(a,b)$

On appelle deuxième dérivée partielle première de f en (a,b) le réel $D_{0,1} f(a,b)$

On la note $D_{e_2} f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a,b)$

$= D_2 f(a,b)$

<u>Exp</u> $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$

$(x, y) \to \sqrt{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

//

$$f(x,y) = f(a,b) + (x-a)\alpha + (y-b)\beta + \|(x,y)-(a,b)\|\, \varepsilon(x,y)$$

+H : f est de classe

$\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et st continues su

$$D_a f(a,b) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$