mathematique des réels

TD5

5. Convexité

①: $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable pour tout $x \in]0,1[$

$f''(x) \leq 1$

$* \ \varphi(x) = f(x) + \frac{x(1-x)}{2}$

$\varphi'(x) = f'(x) + \left(\frac{x(1-x)}{2}\right)' = f'(x) + \left(\frac{1}{2}(x - x^2)\right)'$

$= \frac{1}{2}(1-2x)$

$\varphi'(x) = f'(x) + \frac{1}{2} - x$

$\varphi''(x) = f''(x) - 1$

Comme $f''(x) \leq 1 \iff \varphi''(x) \leq 0$

φ est concave.

* Si f est concave sur I $I =]a, b[$, $\forall x, y \in I$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) \geq \frac{\varphi(0)+\varphi(1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x) = f(x) + \frac{x(1-x)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)}{2}$$

$$= f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{8}$$

$$\varphi(0) = f(0)$$

$$\varphi(1) = f(1)$$

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) \geq \frac{\varphi(0)+\varphi(1)}{2}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{8} \geq \frac{f(0)+f(1)}{2}$$

$$\Rightarrow 2f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} \geq f(0) + f(1)$$

$$\Rightarrow f(0) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) \leq \frac{1}{4}$$

Exercice 6

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$ Est ce que A est convexe ?

Les mineurs principaux de A :

$A_1 = 2 > 0$

$A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 2 > 0$

Elle est hessienne d'une fct convexe / de la fct f definie par

$f(x, y) = x^2 + 4xy + \frac{9}{2}y^2$

$B = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

Les mineurs principaux de B : $B_1 = -3 < 0$

$B_2 = -3 \times 5 - 6 \times 6 = -63 < 0$

Donc B n'est ni négatif, ni positive, donc elle ne peut être le hessienne ni d'une fct convexe, ni d'une fct concave.

G_2 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois derivable, convexe et $f \geq 0$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g(x) = e^{\frac{x}{2}} f(e^{-x})$

Le but : $g'' \geq 0$.

$g'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} f(e^{-x}) + f'(e^{-x}) \times (-e^{-x}) \times e^{x/2}$

$\Leftrightarrow g'(x) = \frac{e^{x/2}}{2} f(e^{-x}) - e^{-\frac{x}{2}} f'(e^{-x})$

$g''(x) = \frac{1}{4} e^{x/2} f(e^{-x}) - e^{-x} f(e^{-x}) \frac{e^{x/2}}{2}$

$+ \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} f'(e^{-x}) - e^{-x} f''(e^{-x}) \times (-e^{-\frac{x}{2}})$

$= \frac{e^{x/2}}{4} f(e^{-x}) - \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2} f'(e^{-x}) + \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2} f'(e^{-x})$

$+ e^{-3x/2} f''(e^{-x})$

$= \frac{e^{x/2}}{4} f(e^{-x}) + e^{\frac{-3x}{2}} f''(e^{-x}) \geq 0 \Rightarrow$ donc convexe

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

C n'est pas symétrique donc elle ne peut être la hessienne d'une fct de classe C^2.

<u>Exercice 7</u>

$$f_1(x,y,z) = -x^2 - yz - 5y^2 + 4xy - z^2 + xz$$

$$H_{f_1}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 4 & -10 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$A_1 = -2 < 0$

$A_2 = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -10 \end{vmatrix} = 4 > 0$

$A_3 = -2 \begin{vmatrix} -10 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -10 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 38 + 28 + 6$

$= -4 < 0$

$$\left.\begin{array}{l} A_1 < 0 \\ A_2 > 0 \\ A_3 < 0 \end{array}\right\} \quad f \text{ est concave}$$

$f_2 = 3x^2 + 2yz + 6y^2 + xz$

$$Hf_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$A_1 = 6 > 0$

$A_2 = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = 72 > 0$

$A_3 = 6 \begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 12 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -24 - 12 = -36 < 0$

Elle est ni concave ni convexe

Exercice 7

1. $f_1(x,y,z) = -x^2 - yz - 5y^2 + 4xy - z^2 + xz$

$$Hf_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 4 & -10 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$Hf_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 4 & -10 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$A_1 = -2 < 0$

$A_2 = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -10 \end{vmatrix} = 4 > 0$

$A_3 = -2\begin{vmatrix} -10 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -10 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 38 + 28 + 6 = -4 < 0$

$\left.\begin{array}{l} A_1 < 0 \\ A_2 > 0 \\ A_3 < 0 \end{array}\right\}$ f est concave

2. $f_2 = 3x^2 + 2yz + 6y^2 + xz$

$$Hf_2(x,y,z) = \begin{array}{c|ccc|} & x & y & z \\ x & 6 & 0 & 1 \\ y & 0 & 12 & 2 \\ z & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

$A_1 = 6 > 0$

$A_2 = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = 72 > 0$

$A_3 = 6\begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -24 - 12 = -36 < 0$

$$H_{b_2} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$b_3(x,y,z) = x^2 + 2yz + 3y^2 + 3z^2$

$$Hf_3 = \begin{array}{c|ccc|} & x & y & z \\ x & 2 & 0 & 1 \\ y & 0 & 6 & 2 \\ z & 1 & 2 & 6 \end{array}$$

$A_1 = 2$

$A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 12$

$A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 58$

f_3 est convexe

$\left(\det |A_3| = 2\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 0 + \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 32 - 6 = 58 > 0\right)$

$f_4(x,y,z) = -2x^2 - yz - 3y^2 + 5xy + z^2 + xz$

$Hf_4 = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 5 & -6 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$|A_1| = -4 < 0$

$|A_2| = 24 - 25$

$= -1 < 0$

$|A_3| = -4\begin{vmatrix} -6 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

$= -4(-12-1) - 5(10+1) + 1(-5+6)$

$= +52 - 55 + 1 = -2 < 0$

ni convexe ni concave.