EFREI

L2 – semestre 3

Mathématiques du réel

1 Produits scalaires

Généralités sur le produit scalaire

– Exercice 1 –

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 muni d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$. Soit $(x_i)_{i=1,\dots,p}$ une famille de vecteurs de E. On appelle matrice de Gram, et on note $\mathrm{Gram}(x_1,\dots,x_p)$, la matrice de type $p \times p$ dont le terme général en ligne i et colonne j est $(x_i|x_j)$. On appelle déterminant de Gram, et on note $G(x_1,\dots,x_p)$, le déterminant de la matrice de Gram. Démontrer que $G(x_1,x_2,x_3)=0$ si et seulement si la famille (x_1,x_2,x_3) est liée. On démontrerait une équivalence analogue dans le cas de p vecteurs.

Les déterminants de Gram permettent de calculer la distance d'un point à un sous-espace vectoriel quand on en connaît une base. Ils permettent également d'effectuer la minimisation au sens des moindres carrés, c'est-à-dire de minimiser à $A \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ fixés la norme du vecteur $AX-B$, où X décrit $\mathbb{R}^2$.

Divers produits scalaires

– Exercice 2 –

Pour quelles valeurs de λ la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^3$ définie, pour $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ et $y=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$, par :
$(x|y)=x_1y_1+6x_2y_2+3x_3y_3+2x_1y_2+2x_2y_1+3\lambda x_1y_3+3\lambda x_3y_1$ est-elle un produit scalaire ?

– Exercice 3 –

Démontrer que la forme bilinéaire définie par

$$(x|y)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x_1-x_2+x_3\right)\times\left(\frac{1}{\sqrt{3}}y_1-y_2+y_3\right)+(x_2-x_3)\times(y_2-y_3)+3x_3y_3$$

pour $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ et $y=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$, est un produit scalaire.

– Exercice 4 –

Soient a et b deux réels tels que $a<b$, et f une fonction continue positive sur $[a,b]$, distincte de la fonction nulle. Démontrer que l'application φ définie par :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

est un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

– Exercice 5 –

Soit $E=\mathbb{R}_2[X]$. Démontrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle : E^2\to\mathbb{R}$ définie par $\langle P,Q\rangle=\displaystyle\int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$ est un produit scalaire (sans utiliser l'exercice 4).

– Exercice 6 –

Sur $E=\mathbb{R}_2[X]$, on définit : $(P|Q)=\displaystyle\int_0^\pi P(t)Q(t)\sin t\ dt$. Vérifier que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur E (sans utiliser l'exercice 4).

– Exercice 7 –

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On considère l'application φ de E^2 dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (P,Q) \in E^2,\ \varphi(P,Q) = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0).$$

Démontrer que φ est un produit scalaire sur E.

– Exercice 8 –

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère l'application φ de E^2 dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (P,Q) \in E^2,\ \varphi(P,Q) = \sum_{i=0}^{n} P(i)Q(i).$$

1. Démontrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. Déterminer une famille $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $n+1$ polynômes de E telle que :

$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2, \quad L_i(j) = \delta_{i,j}$$

où $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon (symbole de Kronecker). On procédera par analyse puis synthèse. Ces polynômes sont appelés *polynômes interpolateurs de Lagrange.*

UTILISATION DES PRODUITS SCALAIRES

– Exercice 9 –

Résoudre l'équation $\quad (1-x)^2 + (x-y)^2 + (y-z)^2 + z^2 = \dfrac{1}{4} \quad$ d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

2 Espaces vectoriels normés

NORMES

– Exercice 1 –

Démontrer que l'application $N_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $N_1(x_1, x_2) = |x_1| + |x_2|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

– Exercice 2 –

Soit $E = \mathbb{R}^2$. Considérons l'application $N : E^2 \to \mathbb{R}$ définie par $N(x_1, x_2) = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \dfrac{|tx_1 + x_2|}{1+t^2}$.

1. Vérifier que N est bien définie puis démontrer que c'est une norme sur E.
2. Décrire la boule unité fermée de N.

– Exercice 3 –

Démontrer que l'application N_∞, définie sur l'espace $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ des applications réelles bornées par $N_\infty(f) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$, est une norme.

– Exercice 4 –

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Considérons l'application $N : E^2 \to \mathbb{R}$ définie par $N(A) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|=1} \|Ax\|$. Démontrer que N est une norme sur E.

– Exercice 5 –

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Considérons l'application $N : E^2 \to \mathbb{R}$ définie par $N(A) = \sup(|a_{i,j}|)$.

1. Démontrer que N est une norme sur E.
2. Établir une inégalité reliant $N(AB)$, $N(A)$ et $N(B)$.

– Exercice 6 –

Soit E l'espace vectoriel des suites réelles bornées (u_n) telles que $u_0 = 0$. Soit N_∞ et N les applications de E dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\forall u \in E, \quad N_\infty(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|, \quad N(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|.$$

1. Vérifier que N_∞ et N sont bien définies, puis que ce sont des normes sur E.
2. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on considère la suite u définie par $u_n = \dfrac{n}{n+p}$. Calculer $N_\infty(u)$ et $N(u)$. Les normes N_∞ et N sont-elles équivalentes ?

DISTANCES

– Exercice 7 –

Soit E un ensemble. Considérons l'application $d : E^2 \to \mathbb{R}$ définie par $d(x, y) = 0$ si $x = y$ et 1 sinon.

1. Démontrer que d est une distance sur E. On l'appelle *distance discrète*.
2. Décrire les boules ouvertes pour cette distance.

– Exercice 8 –

1. Démontrer que $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x + y > 1\}$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que $Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 - (x^2 + y^2) = 0\}$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^2$.

– Exercice 9 –

Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ sont-ils ouverts ? Fermés ?

1. $A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x > 0,\, y > 0\big\}$.
2. $B = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 1 < |x - y| \leq 2\big\}$.
3. $C = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, 2x + 3y \leq 5\big\}$.
4. $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 1 \leq \|(x,y)\| \leq 2\big\}$.
5. $E = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, xy < 1,\, 1 < x < 2\big\}$.

3 Fonctions de deux variables

– Exercice 1 –

Étudier l'existence et la valeur éventuelle d'une limite en $(0,0)$ pour les fonctions f définies par les formules suivantes :

1. $f(x,y) = \dfrac{x^5y^3}{x^6+y^4}$.
2. $f(x,y) = \dfrac{((x-1)^2+y^2)\ln((x-1)^2+y^2)}{|x|+|y|}$.
3. $f(x,y) = \dfrac{1+x+y}{x^2-y^2}$.
4. $f(x,y) = \arctan\left(\dfrac{x}{y}\right) + \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

– Exercice 2 –

Étudier le domaine de définition, la continuité et les limites éventelles des fonctions f et g définies par

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \qquad g(x,y) = x\arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

– Exercice 3 –

On considère la fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{\sin^3 x}{\operatorname{ch} x - \cos y}$.

1. Démontrer, pour tout réel t : $\quad |\sin t| \leq |t|, \quad \operatorname{ch} t \geq 1 + \dfrac{t^2}{2}, \quad 1 - \dfrac{t^2}{2} \leq \cos t \leq 1 - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^4}{24}$.
2. Après avoir justifié que f est définie au moins dans un voisinage de $(0,0)$, étudier sa limite en $(0,0)$.

– Exercice 4 –

Déterminer l'ensemble de continuité de l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{xy}\right) & \text{si } xy \neq 0, \\ 0 & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$

– Exercice 5 –

Dans $\mathbb{R}^2$, on note Δ la droite d'équation $y = x$ (première bissectrice). Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta, \quad f(x,y) = \frac{\sin x - \sin y}{x - y}.$$

f est-elle prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^2$?

4 Différentiabilité et différentielles

DÉRIVABILITÉ, DÉRIVÉES PARTIELLES

– Exercice 1 –

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \times \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f en $(0,0)$.
2. (a) Calculer les dérivées partielles premières en tout point $(x,y) \neq (0,0)$.
   (b) Démontrer que f admet des dérivées partielles premières en $(0,0)$ et donner leur valeur.
   (c) Les dérivées partielles premières de f sont-elles continues en $(0,0)$? Justifier.

– Exercice 2 –

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f en $(0,0)$.
2. (a) Calculer les dérivées partielles premières en tout point $(x,y) \neq (0,0)$.
   (b) Démontrer que f admet des dérivées partielles premières en $(0,0)$ et donner leur valeur.
   (c) Les dérivées partielles premières de f sont-elles continues en $(0,0)$? Justifier.

– Exercice 3 –

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

1. Étudier la continuité de f en $(0,0)$.
2. (a) Calculer les dérivées partielles premières en tout point $(x,y) \neq (0,0)$.
   (b) Démontrer que f admet des dérivées partielles premières en $(0,0)$ et donner leur valeur.
   (c) Les dérivées partielles premières de f sont-elles continues en $(0,0)$? Justifier.

– Exercice 4 –

Déterminer toutes les fonctions f, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, telle que

$$\mathrm{d}f = (3y^2 - y^3 + x^2)\mathrm{d}x + 3xy(2-y)\mathrm{d}y.$$

– Exercice 5 –

Soit A et B deux points distincts de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{E} = \{M \in \mathbb{R}^2 \,;\, MA + MB = 2a\}$ l'ellipse de foyers A et B et de demi-grand axe $a > 0$. Soit M un point de $\mathcal{E}$. Démontrer que la bissectrice extérieure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right)$ est la tangente en M à l'ellipse $\mathcal{E}$.

– Exercice 6 –

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet des dérivées partielles seconde croisées $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sur $\mathbb{R}^2$, mais que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

Équations aux dérivées partielles

– Exercice 7 –

Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et $z = e^{\varphi}$. Calculer $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ En déduire toutes les fonctions φ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

– Exercice 8 –

Déterminer, à l'aide du changement de variable $x + y = u$, $xy = v$, toutes les fonctions $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - y^2.$$

– Exercice 9 –

Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = -6f.$$

– Exercice 10 –

On souhaite déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ telles que :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Calculer a, b, c et d de sorte que, par le changement de variables $u = ax + by$, $v = cx + dy$, l'équation aux dérivées partielles donnée devienne $\dfrac{\partial g}{\partial v} = 0$, avec $g(u,v) = f(x,y)$. La résoudre alors.

– Exercice 11 –

Déterminer les fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{y}{x^3}.$$

On utilisera le changement de variables $x = u + v$, $y = u - v$.

5 Convexité

– Exercice 1 –

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que pour tout $x \in]0,1[$, $f''(x) \leq 1$.

1. Que peut-on dire de la fonction $\varphi : x \mapsto f(x) + \dfrac{x(1-x)}{2}$?
2. En déduire que $f(0) - 2f\left(\dfrac{1}{2}\right) + f(1) \leq \dfrac{1}{4}$.

– Exercice 2 –

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable, convexe et telle que $f \geq 0$. Démontrer que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = e^{\frac{x}{2}} f(e^{-x})$ est convexe.

– Exercice 3 –

1. Démontrer que l'application $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x \ln x$ est convexe.
2. En déduire : $\forall (x,y,a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^4, \quad x \ln \dfrac{x}{a} + y \ln \dfrac{y}{b} \geq (x+y) \ln \dfrac{x+y}{a+b}$.

– Exercice 4 –

1. En utilisant l'application $]0;+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto -\ln x$, démontrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall (a_1, \dots, a_n) \in]0;+\infty[^n, \quad \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0;1]^n, \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 : \quad \prod_{k=1}^{n} a_k^{\lambda_k} \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k.$$

2. En déduire que la moyenne géométrique $(a_1 \times \cdots \times a_n)^{\frac{1}{n}}$ des $a_1, \dots, a_n$ est inférieure ou égale à leur moyenne arithmétique $\dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(p,q) \in]1;+\infty[^2$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

   (a) À l'aide du 1., démontrer que pour tous réels strictement positifs x et y : $\quad xy \leq \dfrac{1}{p} x^p + \dfrac{1}{q} y^q$.

   (b) Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ et $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$. On note $\alpha = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ et $\beta = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$.

   En appliquant le (a) à des couples (x,y) judicieux, démontrer **l'inégalité de Hölder** :

$$\left| \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

   Pour $p = q = 2$, on obtient un cas particulier de l'inégalité de Hölder : **l'inégalité de Cauchy-Schwarz**.

   (c) En appliquant l'inégalité de Hölder, majorer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k| \times |x_k + y_k|^{p-1}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |y_k| \times |x_k + y_k|^{p-1}$, et en déduire **l'inégalité de Minkowski** :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

– Exercice 5 –

Soit f une fonction strictement positive définie sur un intervalle I **(attention : f n'est pas supposée dérivable)**. On considère pour tout $a \in \mathbb{R}$ la fonction h_a définie sur I par $h_a(x) = e^{ax}f(x)$. On veut démontrer que $(\ln f)$ est convexe si et seulement si pour tout $a \in \mathbb{R}$, h_a est convexe.

1. On suppose que $\ln f$ est convexe. Montrer que $\ln h_a$ est convexe. En déduire que h_a est convexe.
2. On suppose que pour tout réel a la fonction h_a est convexe.
   (a) Montrer que pour tout $(\alpha, \beta) \in [0,1]^2$ tel que $\alpha + \beta = 1$ et pour tout $(x, y) \in I^2$:
   $$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x)e^{\beta a(x-y)} + \beta f(y)e^{\alpha a(y-x)}.$$
   (b) En choisissant $a = \dfrac{\ln f(y) - \ln f(x)}{x - y}$, démontrer que :
   $$f(\alpha x + \beta y) \leq f(x)^{\alpha} f(y)^{\beta}.$$
   (c) En déduire que $\ln f$ est convexe.

– Exercice 6 –

Les matrices suivantes peuvent-elles être des hessiennes de fonctions convexes ? De fonctions concaves ?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

– Exercice 7 –

Les applications f_1, f_2, f_3 et f_4 définies sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= -x^2 - yz - 5y^2 + 4xy - z^2 + xz, \\ f_2(x,y,z) &= 3x^2 + 2yz + 6y^2 + xz, \\ f_3(x,y,z) &= x^2 + 2yz + 3y^2 + 3z^2 + xz, \\ f_4(x,y,z) &= -2x^2 - yz - 3y^2 + 5xy + z^2 + xz, \end{aligned}$$

sont-elles convexes ? Concaves ?

6 Extrema locaux

– Exercice 1 –

Étudier de deux façons différentes les extrema de la fonction réelle f :

1. Définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.
2. Définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 + (x+y-1)^2 + y^2$.
3. Définie sur $]0,\pi[^2$ par $f(x,y) = \sin x + \sin y + \cos(x+y)$.
4. Définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^3 + xy^2 - x^2y - y^3$.
5. Définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = (x+y)^2 + x^4 + y^4$.
6. Définie sur $\left]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right[^2$ par $f(x,y) = x^2 + y^2 + \cos(x^2+y^2)$.
7. Définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = 2x^4 - 3x^2y + y^2$.
8. Définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2y + \ln(1+y^2)$.
9. Définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = (x+z^2)e^{x(y^2+z^2+1)}$.

– Exercice 2 –

Déterminer les extrema de $f : X \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + x + y$$

où $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \leq 0,\ y \leq 0,\ x + y \geq -3\}$.

– Exercice 3 –

On considère la fonction, définie sur $\mathbb{R}^2$, $f : (x,y) \mapsto (x^2-y)(3x^2-y)$.

Démontrer que la restriction de f à toute droite passant par O admet un minimum strict en O mais que f n'a pas d'extremum en O.

– Exercice 4 –

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2(1+y)^3 + y^4$. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, qu'elle admet un seul point critique, en lequel elle admet un minimum local, mais que f n'admet aucun extremum global.

7 Optimisation

– Exercice 1 –

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x^2 - 2xy + y - z + yz$.

1. Déterminer les extrema de f.
2. Quelle valeur faut-il attribuer à x pour rendre $f(x,y,z)$ minimale lorsque $y = 3$ et $z = 1$? Calculer ce minimum.
3. En quel point $f(x,y,z)$ est-elle maximale lorsque x, y et z sont reliés par les équations

$$\begin{cases} 2x - y &= 1 \\ x + z &= 3 \end{cases} \quad ?$$

– Exercice 2 –

Quel est le parallélépipède rectangle de volume maximum inscrit dans la sphère de rayon a ?

– Exercice 3 –

Déterminer les extrema de la fonction f sous la contrainte $g = 0$ dans chacun des cas suivants :

1. $f(x,y) = x^2 - y$ avec $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$.
2. $f(x,y) = -x^2 - y^2$ avec $g(x,y) = 3x + 4y - 25$.
3. $f(x,y,z) = 2x + 6y + 10z$ avec $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 35$.
4. $f(x,y,z,t) = x + y + z + t$ avec $g(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - 1$.
5. $f(x_1,\dots,x_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$ avec $g(x_1,\dots,x_n) = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - 1$.

– Exercice 4 –

Déterminer les extrema de la fonction f définie par $f(x,y,z) = xyz$ sous les contraintes $x + y + z = 1$ et $y - z = 1$.

– Exercice 5 –

Déterminer les extrema de la fonction f définie par $f(x,y) = 2x^3 + y^4$ sur le disque $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

– Exercice 6 –

Le bénéfice d'une entreprise vérifie la formule $B = L^{2/3}K^{1/3}$, où L est la quantité de travail et K le capital. Le coût des ressources utilisées est $C = wL + rK$, où w est le salaire horaire et r le taux de location du capital.

Déterminer la combinaison de travail et de capital afin de maximiser le bénéfice. (Pour se faciliter la vie, on maximisera $\ln(B)$ au lieu de B.)

– Exercice 7 –

Au moyen d'un graphe, déterminer les extrema de la fonction f définie par $f(x,y) = x + 2y$ sous les contraintes $x + y \leq 10$, $y \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

– Exercice 8 –

Déterminer les extrema de la fonction f définie par $f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$ sur le triangle fermé de sommets $A(-1,1)$, $B(2,1)$ et $C(-1,-2)$ en examinant la convexité de f (pour le maximum) et les extrema sur $\mathbb{R}^2$ (pour le minimum).

8 Intégrales multiples

– Exercice 1 –

Calculer les intégrales doubles $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ dans les cas suivants :

(a) $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq x\}$, $f(x,y) = \dfrac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}$.

(b) $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2 \leq 2p(y+1),\, x^2 \leq -2p(y+1)\}$, $f(x,y) = x^2 - 2py$, $p > 0$ fixé.

(c) $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x \geq 0,\, y^2 + 2x \leq 1\}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$.

(d) $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, x+y \leq 1\}$, $f(x,y) = a^x b^y$, $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$.

(e) $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, x^2+y^2 \leq 1\}$, $f(x,y) = x + y$.

(f) $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2 + y^2 \leq 1\}$, $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$.

(g) $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, 1 \leq x \leq 4,\, \sqrt{x} \leq y \leq \min(2,x)\}$, $f(x,y) = \sin\left(\dfrac{\pi x}{2y}\right)$ (faire un dessin !).

– Exercice 2 –

Calculer les intégrales triples $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ dans les cas suivants :

(a) $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq 1,\, 0 \leq z \leq xy\}$, $f(x,y,z) = x^2y^3z$.

(b) $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, z \geq 0,\, x+y+z \leq 1\}$, $f(x,y,z) = \dfrac{1}{(x+y+z+1)^3}$.

(c) $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x^2+y^2 \leq 2pz,\, 0 \leq z \leq a\}$, $f(x,y,z) = |xyz|$, avec $(p,a) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ fixé.

(d) $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x^2+y^2 \leq \lambda^2 z^2,\, 0 \leq z \leq a\}$, $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, avec $(\lambda,a) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ fixé.

(e) $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$, $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

(f) $\mathcal{D} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, z \geq 0,\, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$, $f(x,y,z) = z$, avec $(a,b,c) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$ fixé.

– Exercice 3 –

Le centre de gravité $G(X,Y)$ d'un solide homogène S est donné par les formules

$$X = \frac{\displaystyle\iint_S x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\displaystyle\iint_S \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}, \qquad Y = \frac{\displaystyle\iint_S y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\displaystyle\iint_S \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}.$$

1. Déterminer le centre de gravité d'une plaque homogène ayant la forme d'un triangle OAB avec $O(0,0)$, $A(a,0)$ et $B(0,b)$, où $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ est fixé.

2. Déterminer le centre de gravité d'une plaque homogène ayant la forme d'un quart de disque

$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq a\}$$

où $a > 0$ est fixé.

9 Champs de vecteurs et intégrales curvilignes

CHAMPS DE VECTEURS ET INTÉGRALES CURVILIGNES

– Exercice 1 –

Le champ de vecteurs défini par $F(x,y,z) = (yz - x^2)\overrightarrow{i} + (zx - y^2)\overrightarrow{j} + (xy - z^2)\overrightarrow{k}$ dérive-t-il d'un potentiel scalaire ? Si oui, déterminer le potentiel scalaire dont dérive F.

– Exercice 2 –

Calculer l'intégrale curviligne $\oint_{\mathcal{C}} \omega$ dans les cas suivants :

1. $\omega = (x - y^3)\,\mathrm{d}x + x^3\,\mathrm{d}y$ et $\mathcal{C}$ est le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ parcouru une fois dans le sens positif.
2. $\omega = -xy^2\,\mathrm{d}x + x^2y\,\mathrm{d}y$ et $\mathcal{C}$ est la demi-cardioïde d'équation polaire $\rho = a \times (1 + \cos\theta)$ pour θ variant de 0 à π ($a > 0$ fixé).
3. $\omega = x^2\mathrm{d}y + y^2\mathrm{d}x$ et $\mathcal{C}$ est la demi-ellipse définie par $\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ et parcourue dans le sens indirect.
4. $\omega = \dfrac{x-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \dfrac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$ et $\mathcal{C}$ est le contour du carré $ABCD$, où $A(1,1)$, $B(-1,1)$, $C(-1,-1)$ et $D(1,-1)$.
5. $\omega = y\mathrm{d}x + 2x\mathrm{d}y$ et $\mathcal{C}$ est le contour du domaine défini par $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 2y \leq 0 \end{cases}$ parcouru une fois dans le sens direct.

– Exercice 3 –

Déterminer les cercles du plan le long desquels l'intégrale curviligne $\oint_{\Gamma} \omega$, avec $\omega = x^2\,\mathrm{d}y + y^2\,\mathrm{d}x$, est nulle.

FORMULE DE GREEN-RIEMANN

– Exercice 4 –

Calculer $I = \oint_{\Gamma} y^2\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$, où Γ est le circuit de $A(-1,0)$ vers $B(1,0)$ et passant par $C(0,1)$, AC étant porté par la droite d'équation $y = x + 1$, CB par la parabole d'équation $y = -x^2 + 1$.

– Exercice 5 –

On considère le domaine borné $\mathcal{D}$ du plan délimité par la parabole d'équation $y = 2 - x^2$ et la droite d'équation $y = x$. Calculer de deux façons différentes la circulation du champ $\overrightarrow{V} = -y^2\overrightarrow{i} + xy\overrightarrow{j}$ sur le contour Γ de $\mathcal{D}$, orienté positivement.

– Exercice 6 –

Calculer l'intégrale double $\iint_{\mathcal{D}} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, où

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, x + y \leq 1\right\},$$

à l'aide de la formule de Green-Riemann.

– Exercice 7 –

Calculer l'aire de l'intérieur de l'astroïde définie par $\begin{cases} x(t) &= a\cos^3 t \\ y(t) &= a\sin^3 t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$.