ZOU
Philippe

05,75/24

L2
2013

Groupe B .. DE de Physique Quantique.

Exercice 3.

$$|\Psi\rangle = \frac{\sqrt{2}}{3}|\phi_1\rangle + \frac{\sqrt{3}}{3}|\phi_2\rangle + \frac{2}{3}|\phi_3\rangle$$

a) Calculons la Norme de $|\Psi\rangle$.

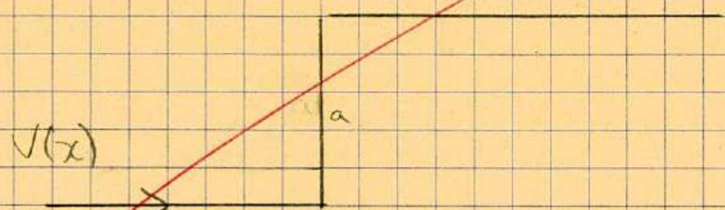
$$\|\Psi\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{9} + \frac{3}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{1} = 1$$ 1

$|\Psi\rangle$ est normalisé

b. $\|\Psi\| = E$??

Problème

a)



b) $H\Psi = E\Psi$.

$$\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V = E\Psi$$

La solution de l'équation de Schrödinger s'écrit

$$\varphi = Ae^{ikx} + Be^{ikx} \text{ avec } k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Il n'y a pas de potentiel de l'autre coste du puits, donc $Be^{ikx} = 0$.

$$k = \frac{n\pi}{a}$$

l'état fondamental équivaut à $n = 1$.

d) $\langle x \rangle \triangleq \int_0 \psi^* x \psi dx = \int_0^a \psi^* x \psi dx.$

$\langle x^2 \rangle = \int_0^a \psi^* x^2 \psi dx.$

0,5

$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$

e) $\langle p \rangle \triangleq \langle \psi | p | \psi \rangle = \langle \psi | \frac{\hbar}{2} \frac{d}{dx} | \psi \rangle = \int_0^a \psi^* \left(-i\hbar \frac{d}{dx}\right) \psi dx.$

$\langle p^2 \rangle \triangleq \langle \psi | p^2 | \psi \rangle$

Exercice 4

a)

b) $[\hat{O}, \hat{\varphi}] = \hat{O}\hat{\varphi} - \hat{\varphi}\hat{O}$

$= -i\frac{d\hat{\varphi}}{d\varphi} + i\varphi \frac{d\varphi}{d\varphi}$

$= (\varphi - 1)\left(i \frac{d\hat{\varphi}}{d\varphi}\right)$

c)

Exercice 2.

a) L'opérateur "spin" a des mesures possibles entre $[0, \pi]$

b) $S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar}{2} \\ \frac{\hbar}{2} & 0 \end{pmatrix}$

$\det(S_x - \lambda I) = \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{\hbar}{2} \\ \frac{\hbar}{2} & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \frac{\hbar^2}{4}$

1

$\Leftrightarrow \pm\sqrt{\frac{\hbar^2}{4}} = \lambda$

donc $\lambda = +\frac{\hbar}{2}$ ou $\lambda = -\frac{\hbar}{2}$

pour $\lambda = \frac{\hbar}{2}$

$\cancel{A(S_x) = A(S_x) = \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} & \frac{\hbar}{2} \\ \frac{\hbar}{2} & \frac{\hbar}{2} \end{pmatrix}}$ $\begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} & \frac{\hbar}{2} \\ \frac{\hbar}{2} & \frac{\hbar}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = 0$

$\begin{cases} \frac{\hbar}{2} z_1 + \frac{\hbar}{2} z_2 = 0 \\ \frac{\hbar}{2} z_1 + \frac{\hbar}{2} z_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 0 \end{cases}$

1

On obtient le même résultat pour $\lambda = -\frac{\hbar}{2}$.

donc la particule possède 1 état propre double $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Zoe Philippe Grp B.

Epreuve de Physique quantique / ESIGETEL-EFREI / A. Moretto / décembre 2013
Sans document – Sans calculatrice -2h

Remarques :

- *Evitez absolument le hors-sujet*
- *Démontrez, n'affirmez pas.*
- *Soignez votre orthographe et votre présentation*
- *Les temps indiqués sont des maxima. Au-delà, vous faites certainement fausse route.*

Exercice 1 : QCM commenté (15mn).

Propositions	Réponse(s)	Justification	
Le principe d'incertitude temps-énergie peut être écrit : a. $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$ b. $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{4}$ c. $\Delta E \cdot \Delta t > \hbar$ d. $\Delta\omega \cdot \Delta t \geq \hbar$	b	$\Delta E . \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$ $\frac{\hbar}{2} > \frac{\hbar}{4}$ donc $\Delta E . \Delta t \geq \frac{\hbar}{4}$	
En une dimension, l'équation de Schrödinger complète s'écrit : a. $-\hbar\omega\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x)\psi$ b. $-\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x)\psi$ c. $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x)\psi$ d. $-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x)\psi$	c	$H\Psi = i\hbar\frac{d\Psi}{dt}$ avec $H = \frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V$ d'où $i\hbar\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V(x)\Psi$	0,5
La moyenne de l'opérateur A d'un système dans l'état ψ se calcule par : a. $\langle A\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x)A\,\psi(x)dx$ b. $\langle A\rangle = \langle\psi\|A\|\psi\rangle$ c. $\langle A\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x)A^2\psi(x)dx$	b	$\langle A\rangle = \sum a_n P(a_n)$ $= \langle\Psi\|A\|\Psi\rangle$	0,5
Soit un état ψ d'un espace repéré par une base orthonormée ϕ_i. On a $\psi = \sum_n C_n\phi_n$. Quelle propriété doit suivre les coefficients C_n ? a. $\sum_n C_n = 1$ b. $\sum_n \|C_n\|^2 = 1$ c. $\forall n, C_n \in \mathbb{R}$ d. Aucune contrainte particulière.	a	Condition de normalisation	
Les coefficients C_n du développement de ψ sur la base des ϕ_n peuvent s'écrire : a. $C_n = (\sum_n \|\phi_n\rangle)\|\psi\rangle$ b. $C_n = \int dx\phi_n^*(x)\psi_n^*(x)$ c. $C_n = \int dx\phi_n^*(x)\,x\,\psi_n(x)$ d. $C_n = \int dx\phi_n^*(x)\,x\,\psi_n(x) = \langle\phi_n\|\psi\rangle$	c d		0,25
Quelle proposition est correcte ? a. $\langle\phi\|A^\dagger\|\psi\rangle = \langle\psi\|A\|\phi\rangle^*$ b. $\langle\phi\|A^\dagger\|\psi\rangle = \langle\phi\|A\|\psi\rangle^*$ c. $\langle\phi\|A\|\psi\rangle = \langle\psi\|A\|\phi\rangle^*$ d. $\langle\phi\|A^\dagger\|\psi\rangle = -\langle\psi\|A\|\phi\rangle^*$	c	$\langle\Psi\|\Psi\rangle = \langle\Psi\|\Psi\rangle^*$	

Exercice 2 : Spin (10mn).

Certaines particules élémentaires se comportent comme des électrons et ont, à ce titre, un moment angulaire appelé « spin ». La mesure du spin le long de l'axe x est représentée par l'opérateur de Pauli $S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Quelles sont les mesures possibles de l'opérateur du spin ?
b. Quels sont les états propres possibles de la particule ?

Exercice 3. Mesure d'un état (20mn).

Un système quantique est dans l'état : $|\psi\rangle = \frac{\sqrt{2}}{3}|\Phi_1\rangle + \frac{\sqrt{3}}{3}|\Phi_2\rangle + \frac{2}{3}|\Phi_3\rangle$ où les $|\Phi_i\rangle_{1\leq i\leq 3}$ représentent une base ortho-normée d'états propres de l'opérateur Hamiltonien H (opérateur énergie) :

$$\begin{cases} H|\Phi_1\rangle = E|\Phi_1\rangle \\ H|\Phi_2\rangle = 2E|\Phi_2\rangle \\ H|\Phi_3\rangle = 3E|\Phi_3\rangle \end{cases}$$

a. $|\psi\rangle$ est-il normalisé ?
b. Quelle est la probabilité d'obtenir, comme mesure de l'énergie, les valeurs respectives E, 2E et 3E?
c. Quelle est l'énergie moyenne de ce système ?

Exercice 4 (20mn).

Soit un opérateur $\hat{O} = -i\frac{d}{d\varphi}$ où φ représente l'azimut en coordonnées sphériques.

a. Trouver les fonctions propres $f(\varphi)$ de l'opérateur $\hat{O}$ et leurs valeurs propres λ associées qui respectent les contraintes suivantes : $f(0) = f(2\pi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ et $\lambda > 0$.
b. Soit $\hat{\varphi}$ l'opérateur tel que $\hat{\varphi}f = \varphi f$. Calculer le commutateur $[\hat{O}, \hat{\varphi}]$.
c. Quels que soient f et g, démontrez que $\langle g|\hat{O}f\rangle = \langle g\hat{O}|f\rangle$. Conclure.

Problème (40mn).

Soit une particule dans un puits de potentiel infini à une dimension de largeur a.

a. Représentez le potentiel V(x).
b. Résolvez l'équation de Schrödinger indépendante du temps. Normalisez la solution pour l'état fondamental.
c. Montrer que l'énergie de la particule est quantifiée et est multiple de $E_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$.