NOM FAILLA

Prénom Romain

Promo 2018

Date 08/12/2014

FAILLA Romain
L2 - 2014

$\frac{19}{20}$ $\frac{19}{20}$

MATIÈRE Physique quantique

Exercice 1

1. Expressions des composants de $\vec{k}$

On cherche k_x, k_y et k_z tels que :

$$\Psi(x,y,z,t) = \Psi_0 e^{-i(\omega t - k(\alpha x - \beta y - \gamma z))} = \Psi_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$$

On sait que $\vec{k}\cdot\vec{r}$ est un produit scalaire donc, lorsque $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,

$$\vec{k}\cdot\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$

Or, $k(\alpha x - \beta y - \gamma z) = \alpha k x - \beta k y - \gamma k z$

Par unicité, $\boxed{\begin{cases} k_x = \alpha k \\ k_y = -\beta k \\ k_z = -\gamma k \end{cases}}$

1

2. Détermination numérique de λ

On a $\Psi(x,y,z,t) = 10\, e^{-i(\omega t - 2x - 3y - 4z)}$

Donc, $\vec{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow k = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2}$

$= \sqrt{4 + 9 + 16}$

$= \sqrt{29}$

2

Or, on que $k = \frac{2\pi}{\lambda} \Longleftrightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k}$ donc, en faisant l'application numérique

$$\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{29}} = \boxed{\frac{2\pi\sqrt{29}}{29}\ m}$$

3. Calcul de ω

Tout d'abord, on sait qu'une vitesse s'exprime par :

$$v = \frac{d}{\Delta t}$$

Dans notre cas, notre onde est électromagnétique, sa célérité est donc celle de la lumière. De plus, la distance qu'elle parcourt pendant une de ces périodes T est λ donc, nous avons la relation suivante :

$$c = \frac{\lambda}{T} \Leftrightarrow T = \frac{\lambda}{c} \Rightarrow f = \frac{c}{\lambda}$$

1

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}}$$

Application Numérique :

$$\omega = \frac{2\pi \times 3 \times 10^8}{\frac{2\pi}{\sqrt{29}}} = \frac{\cancel{2\pi} \times 3 \times \sqrt{29}}{\cancel{2\pi}} \times 10^8 = \boxed{3\sqrt{29} \times 10^8 \text{ rad/s}}$$

4. Déterminons les valeurs des cosinus directeurs

On sait que $\vec{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et que $\|\vec{k}\| = \sqrt{29}$.

Vu que $\vec{k} = \|\vec{k}\| \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$, on a le système suivant :

$$\begin{cases} \|\vec{k}\|\alpha = 2 \\ \|\vec{k}\|\beta = 3 \\ \|\vec{k}\|\gamma = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \alpha = \frac{2\sqrt{29}}{29} \\ \beta = \frac{3\sqrt{29}}{29} \\ \gamma = \frac{4\sqrt{29}}{29} \end{cases}}$$

1

Exercice 2

1. Expression de $\Delta x \cdot \Delta p_x$

On sait que $p = mv = \frac{h}{\lambda}$ donc,

$$p = \frac{h}{\lambda} \Leftrightarrow p = \frac{2\pi h}{2\pi \lambda}$$

$$\Leftrightarrow p = k\hbar$$

2 $$\Leftrightarrow k = \frac{p}{\hbar}$$

Par conséquent, vu qu'on sait que $\Delta x \cdot \Delta k_x = 4\pi$, on peut en déduire que :

$$\Delta x \cdot \Delta k_x = 4\pi \Leftrightarrow \Delta x \cdot \frac{\Delta p_x}{\hbar} = 4\pi$$

$$\Leftrightarrow \Delta x \cdot \Delta p_x = 4\pi \hbar$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Delta x \cdot \Delta p_x = 2h}$$

De plus, on sait que $\hbar < h \Leftrightarrow \frac{\hbar}{2} < \frac{h}{2}$ et on que $\frac{h}{2} < 2h$, on a :

$$\boxed{\frac{\hbar}{2} \leq 2h \Leftrightarrow \Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}}$$

2. Expression de Δt

On sait que sur une dimension, la vitesse de groupe du paquet d'onde est :

1 $$v_g = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Leftrightarrow \boxed{\Delta t = \frac{\Delta x}{v_g}}$$

3. Expression de $\Delta t \cdot \Delta E$

On sait que $E = \frac{p^2}{2m}$ donc,

$$\Delta t \cdot \Delta E = \frac{\Delta x}{v_g} \cdot \frac{\Delta p_x^2}{2m} = \boxed{\frac{h\,\Delta p_x}{v_g \cdot m}}$$

En définitive, grâce à la relation entre E et p, on a trouvé que :

$$\boxed{\Delta t \cdot \Delta E = \frac{\hbar \cdot \Delta p_x}{v_g \cdot m}}$$

Exercice 3

1. Equation de transformation

Vu que $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, on a :

$$\vec{dr} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

Par conséquent,

$$\varphi(\vec{r}) = M(\vec{r}) + T(\vec{dr})$$

$$= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} + dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$= (x + dx)\vec{i} + (y + dy)\vec{j} + (z + dz)\vec{k}$$

Donc, $\boxed{\varphi(r) = (x + dx)i + (y + dy)j + (z + dz)k}$

1

2. Développement limité de $\varphi(r)$ d'ordre 1

Le développement limité de $\varphi(r)$ d'ordre 1 est :

$$\boxed{\varphi(r) = r + i\frac{\partial \varphi(r)}{\partial x} + j\frac{\partial \varphi(r)}{\partial y} + k\frac{\partial \varphi(r)}{\partial z} + o(r)}$$

3. Expression de $T(dr)$

D'après le développement limité trouvé ci-dessus, on peut dire que

$$\boxed{T = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}}$$

NOM FAILLA

Prénom Romain

Promo 2018

Date 08/12/2014

MATIÈRE Physique quantique

Exercice 4

1. Equations aux valeurs propres

$A\psi = \alpha \psi$ et $A\varphi = \alpha \varphi$

2

2. Opérations sur des équations aux valeurs propres

$\lambda A \psi + \mu A \varphi = \lambda \alpha \psi + \mu \alpha \varphi \Leftrightarrow \boxed{A(\lambda\psi + \mu\varphi) = \alpha(\lambda\psi + \mu\varphi)}$

1

3. Une déduction

Vu que $\lambda A \psi + \mu A \varphi = \lambda \alpha \psi + \mu \alpha \varphi \Leftrightarrow A(\lambda\psi + \mu\varphi) = \alpha(\lambda\psi + \mu\varphi)$

On a donc affaire à une combinaison linéaire.

Or, vu que une valeur propre est une solution particulière d'une fonction propre,

On peut définir $\chi = \lambda\psi + \mu\varphi$, une nouvelle fonction propre telle que:

$\boxed{A\chi = \alpha\chi}$

1

4. Action de B sur $A\psi$

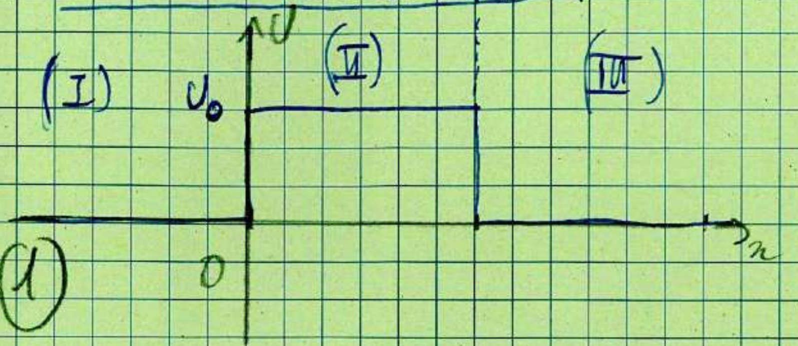
On sait que $A\psi = \alpha\psi \Rightarrow \boxed{AB\psi = \alpha B\psi}$ (car A et B commutent)

1

5. Montrons que $B\psi$ est aussi une fonction propre

Exercice 5

1. Schéma de la situation



1

2. Décomposition de l'équation de Schrödinger

$$H\Psi = E\Psi \Leftrightarrow \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(x)\right)\Psi = E\Psi$$

Dans (I), $U(x) = 0$ donc,

$$H\Psi = E\Psi \Leftrightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi = E\Psi$$ (même cas pour la région (III))

Dans (II), $U(x) = U_0$ donc,

$$H\Psi = E\Psi \Leftrightarrow \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U_0\right)\Psi = E\Psi$$

3

3. Solutions de l'équations de Schrödinger pour notre situation

Pour les régions (I) et (III),

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi = E\Psi \Leftrightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right) = E\Psi$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \times \frac{d^2\Psi}{dx^2} = E\Psi$$ (car Ψ est une fonction d'onde unidimensionnelle)

$$\Leftrightarrow \frac{\hbar^2}{2m} \times \frac{d^2\Psi}{dx^2} + E\Psi = 0$$

En posant $\Psi(x) = e^{rx}$, on a :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi = E\Psi \Leftrightarrow \frac{\hbar^2}{2m} r^2 e^{rx} + E e^{rx} = 0$$

Par conséquent, on peut poser que :

$$\frac{\hbar^2}{2m} r^2 + E = 0 \Leftrightarrow \frac{\hbar^2}{2m} r^2 = -E$$

$$\Leftrightarrow r^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\Leftrightarrow r = \pm i \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Donc, dans les régions (I) et (III), $\boxed{\psi(x) = \cancel{2A} \cos \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}}$

Dans la région (II),

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U_0\right)\psi = E\psi \Leftrightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U_0\psi = E\psi$$

$$\Leftrightarrow \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + (E - U_0)\psi = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\hbar^2}{2m} \times \frac{d^2\psi}{dx^2} + (E - U_0)\psi = 0$$

En posant toujours $\psi(x) = e^{rx}$, on obtient :

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U_0\right)\psi = E\psi \Leftrightarrow \frac{\hbar^2}{2m} r^2 e^{rx} + (E - U_0)\psi = 0$$

Par conséquent, on peut en déduire que :

$$\frac{\hbar^2}{2m} r^2 + E - U_0 = 0 \Leftrightarrow \frac{\hbar^2}{2m} r^2 = U_0 - E$$

$$\Leftrightarrow r^2 = \frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}$$

$$\Leftrightarrow r = \pm \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$$

Donc, dans la région (II),

$$\psi(x) = e^{\frac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar}} + e^{-\frac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar}}$$

$$= \boxed{2 \cosh \frac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar}}$$

Conclusion :

Pour les régions (I) et (III), $\psi(x) = 2 \cos \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

Pour la région (II), $\psi(x) = \cosh \frac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar}$

1