TAI 1

1)

longueur d'onde	λ (nm)	578	546	436	365	254
fréquence d'onde	v(.10^{12} Hz)	519	549	688	822	1181
Energie cinétique	Ec (éléctron) (eV)	0,21	0,33	0,9	1,46	2,94
	Ec (éléctron) (J)	3,36E-20	5,29E-20	1,44E-19	2,34E-19	4,71E-19
vitesse	v (éléctron) (m/s)	2,72E+05	3,41E+05	5,63E+05	7,17E+05	1,02E+06

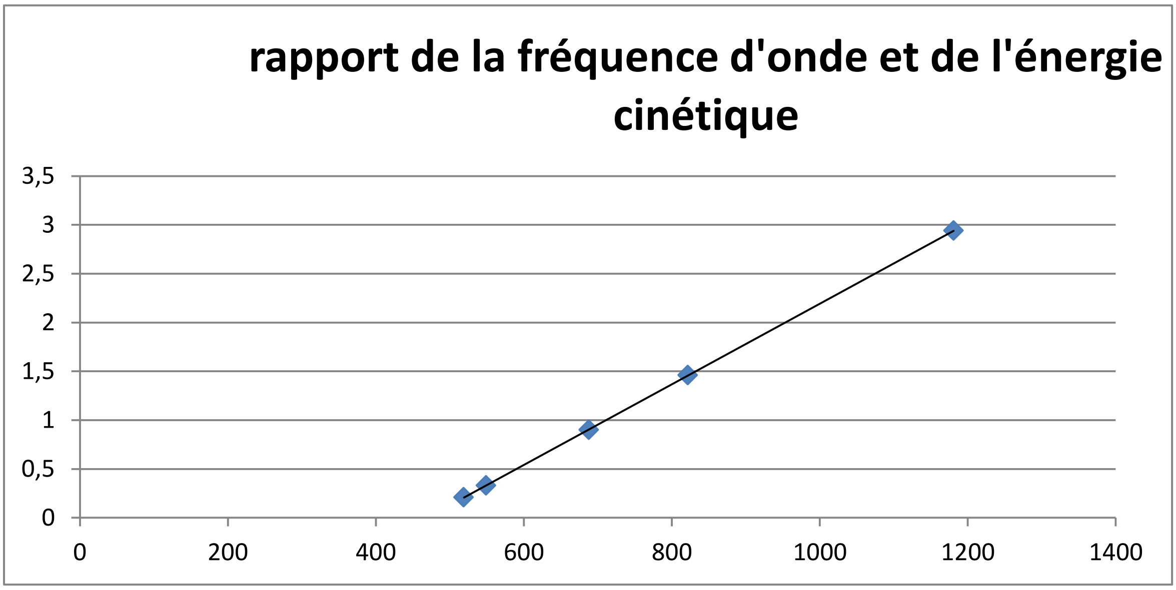
V de la fréquence d'onde noté f (car v est chiant à écrire :D)

F= 1/T   or T= λ/c avec c la célérité = 3.10^8m/s donc f = c/λ

Ec est en eV on le passe en J (Joule) pour obtenir des kg.m²/s² (c'est ça que l'on appelle des « Joules »).

Ec(J) = $1,602.10^{-19}$(J) x Ec(eV)

La vitesse v est donnée par $v^2 = \frac{2Ec}{me}$ ce qui donne $v = \sqrt{\frac{2Ec}{me}}$ avec Ec en Joule et m_e la masse de l'électron = $9,109.10^{-31}$kg



2)

Ec = fh donc h est le coefficient directeur de la courbe. Donc h = $y_{x+1} - y_x / x_{x+1} - x_x$

constante de Planck expérimentale	h	6,43333E-34	6,554E-34	6,7164E-34	6,6017E-34

Le travail = Wcs = hf-Ec avec f (le v bizarre) la fréquence d'onde, h la constante de Planck et Ec l'énergie cinétique

W_{c8} (cst de Planck)	W_{c8}	3,10E-19	3,11E-19	3,11E-19	3,10E-19	3,11E-19
W_{c8} (cst de Planck expérimentale)	W_{c8}	7,43E-17	9,31E-17	1,54E-16	1,96E-16	2,78E-16

3)

E(J) = hc/w	en nano joule	4,73E-28	4,73E-28	4,73E-28	4,73E-28	4,73E-28
	en joule	4,73E-19	4,73E-19	4,73E-19	4,73E-19	4,73E-19
	en Ev	2,95E+00	2,95E+00	2,95E+00	2,95E+00	2,95E+00

TAI N°2

MECA QUANTIQUE

1. $\boxed{\underset{J}{E_c} = (1/2)\underset{kg}{m_e}\underset{m/s}{V^2}}$

NB : tout doit être en : kg, m, s, J, m^{-3} (pas L)

$= (1/2) \times 9,1\times10^{-31} \times V^2$

$\Rightarrow V^2 = E_c/(1/2 \times 9,1\times10^{-31}) = (7\times \overbrace{1,602\times10^{-19}}^{e}\ J)/(\dots) \approx 2,465\times10^{12} \Rightarrow V = 1,570\times10^{6}\ m/s$

de plus : $\boxed{\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_0 V}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$ → vitesse → V lumière → masse au repos → planck

ou $\boxed{\lambda = h/mV}$ (Lol!) donc :

$$\lambda = \frac{6,62\times10^{-34}}{9,1\times10^{-31}\times1,570\times10^{6}} \times \sqrt{1-\frac{2,465\times10^{12}}{3\times10^{8}}} = \boxed{4,63\times10^{-10}\ m}$$

Distance interatomique cuivre : $a_{Cu} = \overset{\text{internet (wiki)}}{2,556\times10^{-10}}\ m \approx \left(\frac{V_m}{N_A}\right)^{1/3} = \left(\frac{M_{Cu}}{(\rho_{Cu}\times N_A)}\right)^{1/3} \approx \boxed{2,27\times10^{-10}\ m}$ (prendre ça) calcul

On remarque que λ_e et a_{Cu} sont le même ordre de grandeur donc $h/p = \lambda$ aussi (comme $\alpha p/h = 0,48 \sim 1$) donc l'électron a des propriétés ondulatoires.

2. $\boxed{\lambda = h/mV}$ de plus 1 mole → $6,02\times10^{23}$ atomes et $M_O = 16\ g\cdot mol^{-1}$ donc

$m_O = 16/6,02\times10^{23} = 2,66\times10^{-26}\ kg \Leftrightarrow m_{O_2} = 2\times m_O = 5,32\times10^{-26}\ kg$ et on a

$E_c = 25\ meV \Rightarrow V^2 = E_c/(1/2\times5,32\times10^{-26}) = (25\times10^{-3}\times1,6\times10^{-19})/(\dots) = 1,50\times10^{5}$

$\Rightarrow V = 3,88\times10^{2}\ m/s$ donc

$\lambda_{O_2} = 6,62\times10^{-34}/5,32\times10^{-26}\times3,88\times10^{2} \approx \boxed{3,21\times10^{-11}\ m}$

Distance entre 2 molécules dans l'air : $a_{air} \approx \left(\frac{V_m}{N_A}\right)^{1/3} = \left(\frac{22,4\times10^{-3}\ m^{-3}}{6,02\times10^{23}}\right)^{1/3} \approx \boxed{3,34\times10^{-9}\ m}$

Ici on remarque que $\alpha p/h = a_{air}/\lambda_{O_2} \approx 1,04\times10^{2}$ donc comme λ_{O_2} n'est pas à l'ordre de grandeur de a_{air}, la molécule de dioxygène n'a pas de propriétés ondulatoires.

Exercice 3:

$E = 54\ eV \qquad D = 0,125\ nm$

1) Loi de Bragg $\quad 2d \sin\theta = n\lambda$

Longueur d'onde de De Broglie : ~~avec~~ $\lambda = \dfrac{h}{p_e} = 1,67 \times 10^{-10}\ m$

avec $p_e = \sqrt{2 m_e E_c} = 3,97 \times 10^{-24}$

$$\sin\theta = \frac{n\lambda}{2d} = \frac{1,67 \times 10^{-10}}{2 \times 0,125 \times 10^{-9}} = 0,67$$

$\Rightarrow \theta = 42^\circ$

On a donc $\quad \phi = 2 \times (90 - \theta) = 96^\circ$

problème dans l'énoncé $D \neq 0,125\ nm$ on ne trouve pas $\phi = 51^\circ$

2) En regardant la figure on a :

$$\tan\theta = \frac{\frac{A}{2}}{b}$$

~~Longueur d'onde de De Broglie : $\lambda = \frac{h}{p} = 1,67 \times 10^{-10}\ m$~~

~~avec $p_e = \sqrt{2 m_e E_c} = 3,97 \times 10^{-24}$~~

Longueur d'onde de De Broglie : $\lambda_e = \frac{h}{m_e v_e} = 8,674 \times 10^{-11}$ m

avec $V_e = \sqrt{\frac{2E_c}{m_e}} = 8,386 \times 10^{6}$ m.s^{-1}

~~[illegible]~~

Loi de Bragg : $2d \sin\theta = n\lambda$ avec $n = 1$

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{\lambda}{d} = 4,34 \times 10^{-9}$

$\Rightarrow \theta = 2,485 \times 10^{-7}$

$\frac{\Delta}{2} = b \times \tan\theta = 8,674 \times 10^{-10}$

$\Rightarrow \Delta = 1,735 \times 10^{-9}$ m $= 1,735$ nm

Ils n'observent rien car la tache est ~~[illegible]~~ trop petite.

3) $V_e = \sqrt{\frac{2E_c}{m_e}} = 2,652 \times 10^{5}$ m.s^{-1}

$\lambda_e = \frac{h}{m_e V_e} = 2,743 \times 10^{-9}$ m $= 2,743$ nm

$\Delta = 1$ mm $= 1 \times 10^{-3}$ m

$$\frac{\Delta}{2} = b \times \tan\theta$$

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{D} = 5{,}486 \times 10^{-2}$$

$$\Rightarrow \theta = 3{,}14$$

$$b = \frac{\frac{\Delta}{2}}{\tan\theta} = 9{,}100 \times 10^{-3}\,m = 9{,}1\,mm$$

2ème version en prenant la masse du fullerène

$$m_f = 12 \times 10^{-3} \times \frac{60}{N_A} = 1{,}196 \times 10^{-24}\,kg$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2E_c}{m_f}} = 2{,}313 \times 10^{2}\,m.s^{-1}$$

$$\lambda_f = \frac{h}{m_f v_f} = 2{,}393 \times 10^{-12}\,m$$

~~$\sin\theta = \frac{\lambda}{D}$~~

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{D} = 4{,}786 \times 10^{-5}$$

$$\Rightarrow \theta = 2{,}74 \times 10^{-3\,\circ}$$

$$b = \frac{\frac{\Delta}{2}}{\tan\theta} = 10{,}45\,m$$

1) $\dfrac{mv^2}{r} = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow \dfrac{4\pi\varepsilon_0}{e^2} = \dfrac{r}{r^2 m v^2}$

$\Rightarrow \dfrac{4\pi\varepsilon_0}{e^2} = \dfrac{1}{\cancel{r}\, m v^2}$

$r \gg a_0 \Rightarrow r \gg \dfrac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{e^2 m_e}$

$\Rightarrow r \gg \dfrac{\hbar^2}{r m v^2 m_e} \Rightarrow r^2 m^2 v^2 \gg \hbar^2$

(car $m = m_e$)

$\Rightarrow r m v \gg h$

Ce qui implique que $L \gg h$ lorsque $r \gg a_0$

2) Incertitude minimum :

$\Delta x \, \Delta p \geq \dfrac{\hbar}{2}$ or space ~~atom~~ interatomique $= a$

$\Delta p \geq \dfrac{\hbar}{2a}$

Energie cinétique : $E_c = \dfrac{p^2}{2m_e} = \dfrac{\hbar^2}{8a^2 m_e}$

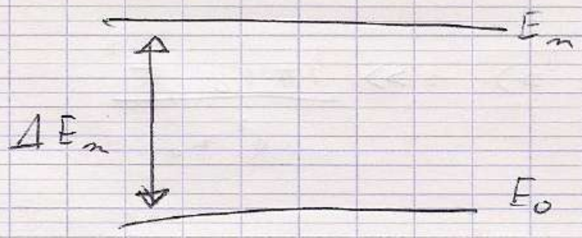
~~impliquant p =~~ mv

impulsion : $p = mv$

$$\Rightarrow v = \frac{p}{m}$$

$$\Rightarrow v = \frac{h}{2a.m}$$

3) Radiation de longueur d'onde $\lambda = 97,24$ nm



Transition électronique de H

$$E_n = \frac{-E_0}{n^2}$$

$$\Delta E = \frac{hc}{\lambda} = 2,04 \times 10^{-18} \text{ J} = 12,76 \text{ eV}$$

$E_0 = 13,6$ eV

$$\Delta E = E_n - E_0 = -\frac{E_0}{n^2} + \frac{E_0}{1^2} = E_0\left(-\frac{1}{n^2} + 1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta E}{E_0} = -\frac{1}{n^2} + 1$$

$$\frac{\Delta E}{E_0} - 1 = -\frac{1}{n^2} \Rightarrow -\frac{1}{\frac{\Delta E}{E_0} - 1} = n^2 \Rightarrow n^2 = 16$$

$$\Rightarrow n = 4$$

TAI N°5

1. Ψ solution de l'équation de Schrödinger si :

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t)}$$

- $\Psi_A(x,t) = A\cos(kx-\omega t)$

$$①: -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi_A(x,t) = -\frac{A\hbar^2}{2m}\frac{\partial}{\partial x}\left(-k\sin(kx-t\omega)\right)$$

$$= \frac{A\hbar^2k^2}{2m}\left(\cos(kx-t\omega)\right)$$

On sais que $\boxed{\omega = E/\hbar}$ et $\boxed{k = P/\hbar}$ et $\boxed{E_c = P^2/2m}$ et $\boxed{E = E_c + V = E_c}$ (particule libre)

$$①: \frac{A\hbar^2 \times \frac{P^2}{\hbar^2}}{2m}\cos(kx-t\omega) = \frac{AP^2}{2m}\cos(kx-t\omega) = \underline{AE_c\cos(kx-t\omega)}$$

$$②: i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_A(x,t) = -i\hbar A\omega\sin(t\omega-kx) = \underline{-iAE_c\sin(t\omega-kx)}$$

On a donc ① ≠ ② donc $\Psi_A(x,t)$ ne vérifie pas l'équation de Schrödinger

- $\Psi_B(x,t) = B\sin(kx-\omega t)$

$$①: -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi_B(x,t) = -\frac{B\hbar^2k}{2m}\frac{\partial}{\partial x}\left(\cos(kx-t\omega)\right) = \frac{+B\hbar^2k^2}{2m}\sin(kx-t\omega)$$

$$= \frac{BP^2}{2m}\sin(kx-t\omega) = \underline{BE_c\sin(kx-t\omega)}$$

$$②: i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_B(x,t) = -i\hbar B\omega\cos(t\omega-kx) = -iBE_c\cos(t\omega-kx)$$

On a donc ① ≠ ② donc $\Psi_B(x,t)$ ne vérifie pas l'équation de Schrödinger

2. Sur une autre planète $\psi(x,t) = A\exp\left(\frac{-i}{\hbar}(px - Et)\right)$ donc il faut que:

$$X \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) = Y \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}$$

$$\Leftrightarrow AX \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{ip}{\hbar}\exp(\sim)\right) = YA\left(\frac{E}{\hbar} i \exp(\sim)\right)$$

$$\Leftrightarrow -AX\frac{p^2}{\hbar^2}\exp(-) = YA\frac{E}{\hbar} i \exp(-)$$

$$\Leftrightarrow -X\frac{p^2}{\hbar^2} = Y\frac{E}{\hbar} i \qquad (E = E_c \rightarrow \text{particule libre})$$

Si on remplace X par $-\frac{\hbar^2}{2m}$ et Y par $i\hbar$ on obtiens

$$\frac{\hbar^2 p^2}{2m\hbar^2} \neq -\frac{E_c\hbar}{\hbar} \Leftrightarrow \frac{p^2}{2m} \neq -E_c \Leftrightarrow E_c$$ donc il faut qu'on prend

comme $X = +\frac{h^2}{2m}$ et $Y = ih$ pour avoir $-\frac{h^2 p^2}{2mh^2} = \frac{E_c\hbar}{\hbar} \Leftrightarrow E_c = E_c$

Donc sur une autre planète la forme de l'équation de Schrödinger est:

$$\boxed{+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial}{\partial x^2}\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)}$$

TAI 6

) Les fonctions d'ondes peuvent s'additionner donc des sommes de fonctions d'ondes forment un espace vectoriel

La condition de normalisation permet donc de | mathematiser / formaliser ce fait en posant que l'onde se situe dans notre espace à coup sur. Donc l'intégrale de 0 à a = 1 nous donne une proba de 1 pour que notre onde soit dans notre espace

$$\int_0^a |\Psi(x)|^2 dx \quad \text{or} \quad \Psi(x) = Nx(a-x) \quad \text{donc}$$

$$\int_0^a |N x(a-x)|^2 dx = |N|^2 \int_0^a |xa - x^2|^2 dx = 1 = |N|^2 \int_0^a (xa - x^2)^2 dx$$

$$\cancel{|N|^2 \left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = 1} \Leftrightarrow |N|^2 \int_0^a x^2a^2 - 2x^3a + x^4 dx$$

$$= |N|^2 \left[\frac{a^2x^3}{3} - \frac{ax^4}{2} + \frac{x^5}{5}\right]_0^a = |N|^2 \left[\frac{a^5}{3} - \frac{a^5}{2} + \frac{a^5}{5}\right]$$

$$= \frac{|N|^2 a^5}{30} = 1$$

$$N^2 = \frac{30}{a^5} \Rightarrow \boxed{N = \sqrt{\frac{30}{a^5}}}$$

Exo 6 2/4

2) position moyenne :

$$<x> = \int_0^a x|\Psi(x)|^2 dx = \int_0^a x|Nx(a-x)|^2 dx$$

$$= |N|^2 \int_0^a x^3(a^2 - 2ax - x^2) dx = |N|^2 \int_0^a x^3a^2 - 2ax^4 + x^5 dx$$

$$= |N|^2 \left[\frac{x^4a^2}{4} - \frac{2ax^5}{5} + \frac{x^6}{6}\right]_0^a = |N|^2 \left(\frac{a^6}{4} - \frac{2a^6}{5} + \frac{a^6}{6}\right)$$

$$<x> = \frac{|N|^2 a^6}{60} \quad \text{or } N = \sqrt{\frac{30}{a^5}}$$

$$<x> = \frac{\frac{30}{a^5} a^6}{60} = \frac{a}{2}$$

impulsion moyenne :

$$<p> = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x) \left|-\frac{\hbar}{i}\right| \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx$$

$$= \int_0^a (Nx(a-x)) \left|-\frac{\hbar}{i}\right| (-N(x-a) - Nx) dx$$

$$= -\frac{\hbar}{i} \int_0^a N^2 x(a-x)(2x-a) dx$$

$$= N^2 \frac{\hbar}{i} \left[2x^2a - 2x^3\right]_0^a = 0$$

Exo 6 $\frac{3}{4}$

3) <u>incertitude de position :</u>

$$\langle x^2\rangle = \int_0^a \Psi^*(x)\,\hat{x}^2\,\Psi(x)\,dx \quad \text{avec } \hat{x}^2 = x^2$$

$$= \int_0^a \Psi(x^2)\,x^2\,dx$$

$$= N^2\int_0^a x^2(a-x)^2 x^2\,dx = N^2\int_0^a x^4(a-x)^2\,dx$$

$$= N^2\int_0^a x^4a^2 - 2ax^5 + x^6\,dx$$

$$= N^2\left[\frac{x^5a^2}{5} - \frac{2ax^6}{6} + \frac{x^7}{7}\right]_0^a = N^2\left(\frac{a^7}{5} - \frac{2a^7}{6} + \frac{a^7}{7}\right)$$

$$= \frac{30a^7}{a^5\times 105} = \frac{2a^2}{7}$$

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{7} - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{8a^2-7a^2}{28}}$$

$$\Delta x = \sqrt{\frac{a^2}{28}} = \frac{a}{\sqrt{28}}$$

Exo 6 | 4/4

incertitude ~~de~~ d'impulsion :

$$\langle p^2 \rangle = \int_0^a \Psi^*(x,t)\, \hat{p}^2\, \Psi(x,t)\, dx$$

$$= \int_0^a (Nx(x-a))\, \hat{p}^2\, \Psi(x,t)\, dx$$

$$\hat{p}^2 \Psi(x,t) = \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \Psi(x,t) dx$$

$$\hat{p}^2 \Psi(x,t) = \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \Psi(x,t) dx = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x,t)$$

$$\text{or } \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x,t) = -N(2x - A)$$

$$\hat{p}^2 \Psi(x,t) = \hbar^2 \times 2N$$

$$\langle p^2 \rangle = \hbar 2N^2 \int_0^a x(a-x) dx = \hbar 2N^2 \int_0^a x^2 - xa\, dx$$

$$= \hbar^2 2N^2 \left[\frac{x a}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = \hbar 2N^2 \left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3}\right)$$

$$= \hbar^2 2N^2 \left(\frac{1}{6} a^3\right) = \hbar^2\, 2 \times \frac{30}{6a^2} = \frac{\hbar^2 10}{a^2}$$

car $N^2 = \frac{30}{a^5}$

$$\Delta p = \sqrt{\frac{\hbar^2 10}{a^2}} = \sqrt{10}\, \frac{\hbar}{a}$$

Ex 7 : Soit : $\Psi(x) = \begin{cases} N x e^{-\alpha x/2} & \text{si } 0 \leq x \leq \infty \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

avec $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $N = \sqrt{\alpha^3/2}$

1). • Probabilité de trouver la particule dans l'espace dx :

$$dP(x) = |\Psi(x)|^2 dx$$

Probabilité de trouver la particule entre x et $x + dx$:

$$P(x) = \int_x^{x+dx} dP(x) \ (= 1)$$

Soit $dP(x) = |\Psi(x)|^2$

$$= \Psi^*_{(x)} \wedge \Psi(x)$$

$$= N^2 x^2 e^{-\alpha x}$$

$$= \frac{\alpha^3}{2} (x^2 e^{-\alpha x})$$

ici $\Psi^*_{(x)} = \Psi(x)$

donc $\Psi^*_{(x)} \wedge \Psi(x) = \Psi^2(x)$

• $\langle x \rangle = \int_0^\infty x |\Psi(x)|^2 dx$

$$= \frac{\alpha^3}{2} \int_0^\infty x^3 e^{-\alpha x} dx$$

$$= \frac{\alpha^3}{2} \times \frac{3!}{\alpha^4}$$

$$= \frac{3}{\alpha}$$

• $\langle x^2 \rangle = \int_0^\infty x^2 |\Psi(x)|^2 dx$

$$= \frac{\alpha^3}{2} \times x^4 e^{-\alpha x} dx$$

$$= \frac{\alpha^3}{2} \times \frac{4!}{\alpha^5}$$

$$= \frac{12}{\alpha^2}$$

$$\boxed{\text{car } \int x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}} \rightarrow \text{énoncé}}$$

NB : Les formules sont dans le cours : 6. Exemples : $\langle x \rangle$, $\langle P \rangle$, $\langle E \rangle$...

$$\langle p \rangle = i\hbar \int_0^{\infty} \left(\Psi^* \frac{d\Psi}{dx} \right) dx$$

$$= i\hbar \int_0^{\infty} \left(\Psi^* \times \frac{d}{dx} \left(N x e^{-\frac{\alpha x}{2}} \right) \right) dx$$

$$= i\hbar \int_0^{\infty} \left(\Psi^* \times \left[N \times \left(e^{-\frac{\alpha x}{2}} - \frac{\alpha x}{2} e^{-\frac{\alpha x}{2}} \right) \right] \right) dx$$

$$= i\hbar \int_0^{\infty} \left(\Psi^* \times \left[N \times e^{-\frac{\alpha x}{2}} \left(1 - \frac{\alpha x}{2} \right) \right] \right) dx$$

ici $\phi^* = \phi$ car ϕ pas complexe donc il n'a pas de conjugué

REPONSE ⇒ ?

$$= i\hbar \int_0^{\infty} \left(N^2 \times x e^{-\alpha x} \left(1 - \frac{\alpha}{2} x \right) \right) dx$$

$$= i\hbar N^2 \int_0^{\infty} \left(x e^{-\alpha x} - \frac{\alpha}{2} x^2 e^{-\alpha x} \right) dx$$

$$= i\hbar N^2 \left[\int_0^{\infty} x e^{-\alpha x} dx - \frac{\alpha}{2} \int_0^{\infty} x^2 e^{-\alpha x} dx \right]$$

$$= i\hbar N^2 \times \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{\cancel{2}\alpha}{\cancel{2}\alpha^3} \right)$$

$$= i\hbar N^2 \times 0$$

$$= 0$$

$2x$

2

$3x^2$

$= 6x$

$$\boxed{\begin{aligned} \langle p \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^*(x,t)\, \hat{p}\, \psi(x,t)\, dx \\ \langle p^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t)\, \hat{p}^2\, \Psi(x,t)\, dx \end{aligned}}$$

← voir cours (partie 6. exemple)

$$\hat{p}^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\hat{p} = \pm i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\hat{p}^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\rho = \frac{kg}{m^3} = \frac{m}{V}$$

$$M = \frac{m}{n}$$

$$m = \rho \times V$$

$$\rangle = \int_0^{+\infty} \Psi^*(x,t)\, \hat{p}^2\, \Psi(x,t)\, dx$$

$$= \int_0^{\infty} \left[N x e^{-\frac{\alpha x}{2}} (-\hbar^2) \frac{d^2}{\partial x^2} \left(N x e^{-\frac{\alpha x}{2}}\right)\right] dx$$

$$= \int_0^{\infty} \left[\Psi^* (-\hbar^2) N \times \frac{d}{\partial x}\left(e^{-\frac{\alpha}{2}x}\left(1 - \frac{\alpha}{2}x\right)\right)\right] dx$$

$$= \int_0^{\infty} \left[\Psi^* (-\hbar^2) N \times \left[\frac{d}{\partial x}\left(e^{-\frac{\alpha x}{2}} - \frac{\alpha}{2} x e^{-\frac{\alpha}{2}x}\right)\right]\right] dx$$

$$= \int_0^{\infty} \left[\Psi^* (-\hbar^2) N \times \left[-\frac{\alpha}{2} e^{-\frac{\alpha}{2}x} - \frac{\alpha}{2}\left(e^{-\frac{\alpha}{2}x} - \frac{\alpha}{2} x e^{-\frac{\alpha}{2}x}\right)\right]\right] dx$$

$$= \int_0^{\infty} \left[\Psi^* (-\hbar^2) N \times \left[-\alpha e^{-\frac{\alpha}{2}x} + \frac{\alpha^2}{4} x e^{-\frac{\alpha}{2}x}\right]\right] dx$$

$$= \int_0^{\infty} \left[\Psi^* (-\hbar^2) N \times \left[e^{-\frac{\alpha}{2}x}\left(-\alpha + \frac{\alpha^2}{4}x\right)\right]\right] dx$$

$$= (-\hbar^2) N^2 \int_0^{\infty} \left[(-\alpha) x e^{-\alpha x} + \frac{\alpha^2}{4} x^2 e^{-\alpha x}\right] dx$$

$$= (-\hbar^2) N^2 \left[(-\alpha) \int_0^{\infty} x\, e^{-\alpha x} dx + \frac{\alpha^2}{4} \int_0^{\infty} x^2 - e^{-\alpha x} dx\right]$$

$$= (-\hbar^2) N^2 \left(-\alpha\left(\frac{1!}{\alpha^2}\right) + \frac{\alpha^2}{4}\left(\frac{2!}{\alpha^3}\right)\right)$$

$$= (-\hbar^2) N^2 \left(-\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha}\right)$$

$$= (-\hbar^2) N^2 \left(-\frac{1}{2\alpha}\right)$$

$$= (-\hbar^2) \frac{\alpha^3}{2} \times \left(-\frac{1}{2\alpha}\right)$$

$$= \frac{\hbar^2 \alpha^2}{4}$$

~~$= i\hbar \int (C \ldots) x\, e^{-\frac{\alpha x}{2}} \left(1 - \frac{\alpha}{2} x\right) dx$~~

~~$= i\hbar \times \int N x e^{-\alpha x} \left(1 - \frac{\alpha}{2} x\right) dx$~~

~~$= i\hbar N \times \int \left(x e^{-\alpha x} - \frac{\alpha}{2} x^2 e^{-\alpha x} \right) dx$~~

~~$= i\hbar N \times \left(\int x e^{-\alpha x} dx - \int \frac{\alpha}{2} x^2 e^{-\alpha x} dx \right)$~~

~~$= i\hbar N \times \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{\alpha}{2} \times \frac{2}{\alpha^3} \right)$~~

~~$= 0$~~

3) Incertitude : $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$

$$= \sqrt{\frac{12}{\alpha^2} - \frac{9}{\alpha^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{\alpha^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\alpha}$$

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar^2 \alpha^2}{4} - 0}$$

$$= \frac{\hbar \alpha}{2}$$

$\Delta x \Delta p = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar \geqslant \frac{1}{2} \hbar$ donc principe d'incertitude de Heisenberg respecté !

Exercice n°8

1) $E = \frac{-\hbar^2\alpha^2}{2m}$ $\quad \phi = Nx e^{-\alpha x}$

Equation de Schrödinger : $-\frac{\hbar^2}{2m} \times \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x,t) + V(x,t) \times \Psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x,t)$

Comme nous avons une energie définie E, alors l'equation de Schrödinger se simplifie ~~par~~ est donne :

$$E\phi(x) = \frac{-\hbar^2\alpha^2}{2m} Nx e^{-\alpha x} = -\frac{\hbar^2}{2m} \times \frac{\partial^2}{\partial x^2} Nx e^{-\alpha x} + V(x) \times Nx e^{-\alpha x}$$

On isole V(x) :

$$\Rightarrow V(x) = \frac{-\frac{\hbar^2\alpha^2}{2m} Nx e^{-\alpha x} + \frac{\hbar^2}{2m} \times \frac{\partial^2}{\partial x^2} Nx e^{-\alpha x}}{Nx e^{-\alpha x}}$$

Dérivons $Nx e^{-\alpha x}$ 2 fois : $\underbrace{Nx}_{u}\underbrace{e^{-\alpha x}}_{v}$

De la forme $(uv)' = u'v + uv'$

$u = Nx \quad v = e^{-\alpha x}$

$u' = N \quad v' = -\alpha e^{-\alpha x}$

$$\Rightarrow N e^{-\alpha x} + Nx(-\alpha e^{-\alpha x})$$

$$\phi'(x) = \underbrace{N e^{-\alpha x}}_{u} \underbrace{(1 - \alpha x)}_{v}$$

$u = N e^{-\alpha x} \quad v = 1 - \alpha x$

$u' = -\alpha N e^{-\alpha x} \quad v' = -\alpha$

$$\Rightarrow (-\alpha N e^{-\alpha x})(1-\alpha x) + (N e^{-\alpha x}) \times (-\alpha)$$

$$= -\alpha N e^{-\alpha x} + \alpha^2 x N e^{-\alpha x} - \alpha N e^{-\alpha x}$$

$$= -2\alpha N e^{-\alpha x} + \alpha^2 x N e^{-\alpha x}$$

$$\phi''(x) = \alpha N e^{-\alpha x}(\alpha x - 2)$$

On revient à V(x) :

$$V(x) = \frac{-\frac{\hbar^2\alpha^2}{2m} Nx e^{-\alpha x} + \frac{\hbar^2}{2m} \times \alpha N e^{-\alpha x}(\alpha x - 2)}{Nx e^{-\alpha x}}$$

$$= \frac{-\hbar^2\alpha^2 \cancel{N} x \cancel{e^{-\alpha x}} + \hbar^2 \alpha \cancel{N} \cancel{e^{-\alpha x}} (\alpha x - 2)}{2m \cancel{N} x \cancel{e^{-\alpha x}}}$$

$$= \frac{-\hbar^2\alpha^2 x + \hbar^2\alpha(\alpha x - 2)}{2mx}$$

$$= \frac{\cancel{-\hbar^2\alpha^2 x + \hbar^2\alpha^2 x} - 2\hbar^2\alpha}{2mx}$$

$$= \frac{-\cancel{2}\hbar^2\alpha}{\cancel{2}mx} = \boxed{-\frac{\hbar^2\alpha}{mx}}$$

2) Probabilité de trouver la particule entre x et $x + dx$:

$$dP(x) = |\phi(x)|^2 dx$$

$$= |N x e^{-\alpha x}|^2 dx$$

$$= \underbrace{N^2 x^2}_{u} \underbrace{e^{-2\alpha x}}_{v} dx \qquad u = N^2 x^2 \qquad v = e^{-2\alpha x}$$

$$u' = 2N^2 x \qquad v' = -2\alpha e^{-2\alpha x}$$

$$= 2N^2 x e^{-2\alpha x} + N^2 x^2 \times (-2\alpha e^{-2\alpha x})$$

$$= N^2 (2x e^{-2\alpha x} + x^2 \times (-2\alpha e^{-2\alpha x}))$$

$$= N^2 (2x e^{-2\alpha x} - 2x^2 \alpha e^{-2\alpha x})$$

D'où : $$N^2 (2x e^{-2\alpha x} - 2x^2 \alpha e^{-2\alpha x}) = 0$$

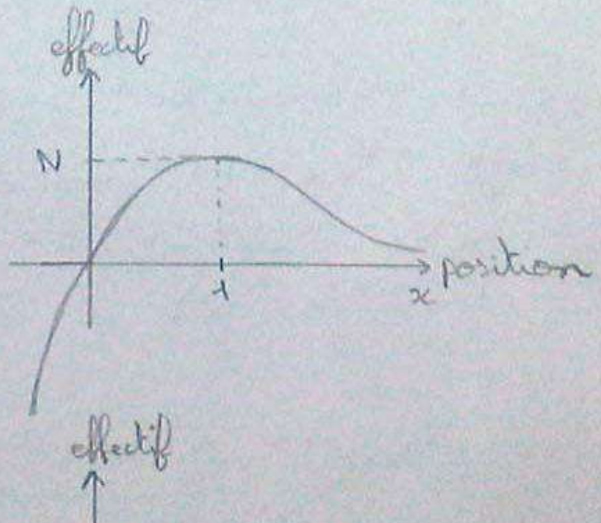
$$\cancel{2x e^{-2\alpha x} - 2x^2 \alpha e^{-2\alpha x} = 0}$$

$$2N^2 e^{-2\alpha x} (x - \alpha x^2) = 0$$

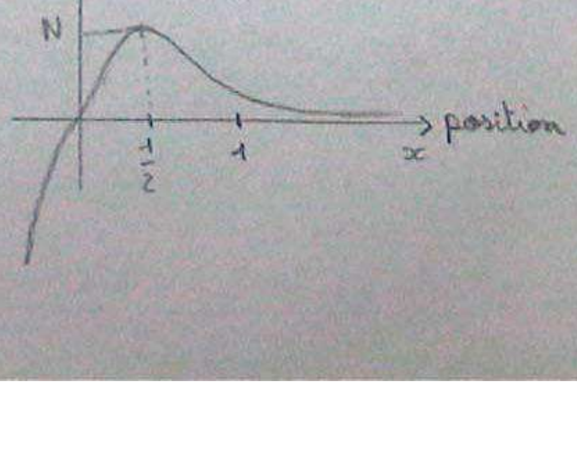
$$\Rightarrow \begin{cases} 2N^2 e^{-2\alpha x} = 0 \\ x - \alpha x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1 - \alpha x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{1}{\alpha} \end{cases}$$

Donc $x_{max} = \dfrac{1}{\alpha}$

3) Pour $\alpha = 1$: $x_{max} = \dfrac{1}{1} = 1$



Pour $\alpha = 2$: $x_{max} = \dfrac{1}{2}$



TAI n°10

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\Phi_0 e^{\frac{-iE_0t}{\hbar}} + \Phi_1 e^{\frac{-iE_1t}{\hbar}}\right]$$

$$E_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

donc $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ et $E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$

d'où $\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\Phi_0 e^{-\frac{i\omega t}{2}} + \Phi_1 e^{-\frac{3i\omega t}{2}}\right]$

$$\Psi(x,t)\Psi^*(x,t) = \frac{1}{2}\left[\Phi_0^* e^{\frac{i\omega t}{2}} + \Phi_1^* e^{\frac{3i\omega t}{2}}\right]\left[\Phi_0 e^{-\frac{i\omega t}{2}} + \Phi_1 e^{-\frac{3i\omega t}{2}}\right]$$

On SAIT QUE $\Phi_0 \in \mathbb{R}$ et $\Phi_1 \in \mathbb{R}$

donc :

$$\Psi(x,t)\Psi^*(x,t) = \frac{1}{2}\left[\Phi_0 e^{\frac{i\omega t}{2}} + \Phi_1 e^{\frac{3i\omega t}{2}}\right]\left[\Phi_0 e^{-\frac{i\omega t}{2}} + \Phi_1 e^{-\frac{3i\omega t}{2}}\right]$$

$$\Psi(x,t)\Psi^*(x,t) = \frac{1}{2}\left[\Phi_0^2 + \Phi_0\Phi_1 e^{-i\omega t} + \Phi_1\Phi_0 e^{i\omega t} + \Phi_1^2\right]$$

$$\Psi(x,t)\Psi^*(x,t) = \frac{1}{2}\left[\Phi_0^2 + \Phi_1^2 + \Phi_0\Phi_1\left(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}\right)\right]$$

$$\Psi(x,t)\Psi^*(x,t) = \frac{1}{2}\left[\Phi_0^2 + \Phi_1^2 + \Phi_0\Phi_1 2\cos(\omega t)\right]$$

1) On intègre $\Psi(x,t)\Psi^*(x,t)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi(x,t)\Psi^*(x,t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_0^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_1^2\,dx + \frac{1}{2}2\cos(\omega t)\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_0\Phi_1\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\int\Phi_0^2\,dx}_{\substack{1\\ \text{car normée}}} + \frac{1}{2}\underbrace{\int\Phi_1^2\,dx}_{\substack{1\\ \text{car normée}}} + \underbrace{\cos(\omega t)\int\Phi_0\Phi_1\,dx}_{\substack{\text{produit scalaire}=0\\ \text{car }\Phi_0\text{ et }\Phi_1\text{ orthogonaux}}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{1}$$

Donc $\Psi(x,t)$ normée

2) $$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^* x\,\Psi\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_0^2 x + \Phi_1^2 x + 2\Phi_0 x\Phi_1\cos(\omega t)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_0^2 x\,dx}_{0} + \frac{1}{2}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_1^2 x\,dx}_{0} + \cos(\omega t)\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_0 x\Phi_1\,dx$$

$$= \cos(\omega t)\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_0(x)\,x\,\Phi_1(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\langle x\rangle = A\cos(\omega t)}}.$$

→ Equation de Schrödinger $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(r) + V(r)\Psi(r) = E\Psi(r)$ (1)

avec $\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\Psi)}{\partial r^2}$

1) $-\frac{\hbar^2}{2m}u''(r) + V(r)u(r) = E u(r)$ (2)

On sait que l'onde stationnaire respecte l'équation 1

$\frac{1}{r}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 u(r) + V(r)u(r)\right) = E\frac{u(r)}{r}$

$\rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 u(r) + V(r)u(r) = E u(r)$

$\rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\Psi)}{\partial r^2}\right).u(r) + V(r)u(r) = E u(r)$

$\rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\cdot\frac{u(r)}{r})}{\partial r^2}\right)u(r) + V(r)u(r) = E u(r)$

$\rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{r}\underbrace{\frac{\partial^2 u(r)}{\partial^2 r^2}}\right).u(r) + V(r)u(r) = E u(r)$

$\rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}u''(r)\frac{1}{r}u(r) + V(r)u(r) = E u(r)$

→ $\Psi(r)$

2) $E = -\frac{\hbar^2\alpha^2}{2m}$ avec $0 < E < V_0$

$r < R$: $\rightarrow V(r) = -V_0$

donc (2) $\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}u''(r) - V_0 u(r) = -\frac{\hbar^2\alpha^2}{2m}u(r)$

$\rightarrow \frac{\hbar^2}{2m}(-u''(r) + u(r)\alpha^2) = V_0 u(r)$

$\rightarrow \boxed{\frac{\hbar^2}{2mV_0} = \frac{u(r)}{u(r)\alpha^2 - u''(r)}}$

→ $A\sin(k_0 r)$

$r > R$ $\rightarrow V(r) = 0$

$-\frac{\hbar^2}{2m}u''(r) = -\frac{\hbar^2\alpha^2}{2m}u(r)$

$\rightarrow u''(r) = \alpha^2 u(r)$

$\rightarrow \boxed{\frac{u''(r)}{u(r)} = \alpha^2}$

→ $B\exp(-\alpha r)$

n°3

solution 1

$\Rightarrow \frac{A\sin(k_0 r)}{\alpha^2 A\sin(k_0 r) - (A\sin k_0 r)''}$

$= \frac{\sin(k_0 r)}{\alpha^2\sin(k_0 r) - (\sin k_0 r)''}$ → $k_0[\cos(k_0 r)]'$ → $-k_0^2\sin(k_0 r)$

$= \frac{1}{\alpha^2 + k_0^2}$

$= \frac{\hbar^2}{\hbar^2\alpha^2 + 2m(V_0 + E)} = \frac{\hbar^2}{\hbar^2\alpha^2 + 2mV_0 - \hbar^2\alpha^2} = \frac{\hbar^2}{2mV_0}$

solution 2

$\frac{[B\exp(-\alpha r)]''}{B\exp(-\alpha r)} = \alpha^2$

→ $\frac{(e^{-\alpha r})''}{e^{-\alpha r}} = \frac{-\alpha(-\alpha e^{-\alpha r})}{e^{-\alpha r}}$

$= \alpha^2$

Exercice 11

3) $\Psi(r) \xrightarrow[\infty]{} 0 \Rightarrow$ fonction de type $\exp(-x)$

$\Psi(r) \xrightarrow[0]{} 0 \Rightarrow$ fonction de type $\sin(x)$

Cas $r < R$

$\hookrightarrow$ Solution $\frac{A}{r}\sin(k_0 r) = \Psi(r)$

On a $\Psi(r) = \frac{u(r)}{r}$ d'où $u(r) = A\sin(k_0 r)$

$\rightarrow$ On remplace dans l'équation $\frac{u(r)}{u(r)\alpha^2 - u''(r)} = \frac{\hbar^2}{2mV_0}$

$$\hookrightarrow \frac{A\sin(k_0 r)}{A\sin(k_0 r) - [A\sin(k_0 r)]''}$$

$$= \frac{\sin(k_0 r)}{\alpha^2\sin(k_0 r) - [\sin(k_0 r)]''} \qquad \sin(k_0 r)'' = k_0[\cos(k_0 r)]' = -k_0^2\sin(k_0 r)$$

$$= \frac{\sin(k_0 r)}{\alpha^2\sin(k_0 r)(1-(-k_0^2))}$$

$$= \frac{1}{\alpha^2 + k_0^2} \qquad \text{or } k_0 = \frac{\sqrt{2m(V_0+E)}}{\hbar}$$

$$= \frac{1}{\alpha^2 + \frac{2m(V_0+E)}{\hbar^2}}$$

$$= \frac{\hbar^2}{\hbar^2\alpha^2 + 2m(V_0+E)} \qquad \text{or } E = \frac{-\hbar^2\alpha^2}{2m}$$

$$= \frac{\hbar^2}{\hbar^2\alpha^2 + 2mV_0 - \hbar^2\alpha^2}$$

$$= \frac{\hbar^2}{2mV_0}$$

L'équation est vérifiée

Cas $r > R$

$\hookrightarrow$ Solution $\frac{B}{r}\exp(-\alpha r) = \Psi(r)$

On a donc $u(r) = \Psi(r)\, r = B\exp(-\alpha r)$

On remplace dans l'équation $\frac{u''(r)}{u(r)} = \alpha^2$

$$\frac{[B\exp(-\alpha r)]''}{B\exp -\alpha r} = \frac{(e^{-\alpha r})''}{e^{-\alpha r}} = \frac{-\alpha(e^{-\alpha r})'}{e^{-\alpha r}} = \alpha^2\frac{e^{-\alpha r}}{e^{-\alpha r}} = \alpha^2$$

L'équation est vérifiée