TAI Probabilités

Projet EFREI

6/1/2012

FABRE Maxime
FOUCHE Alexis
LEPOT Florian

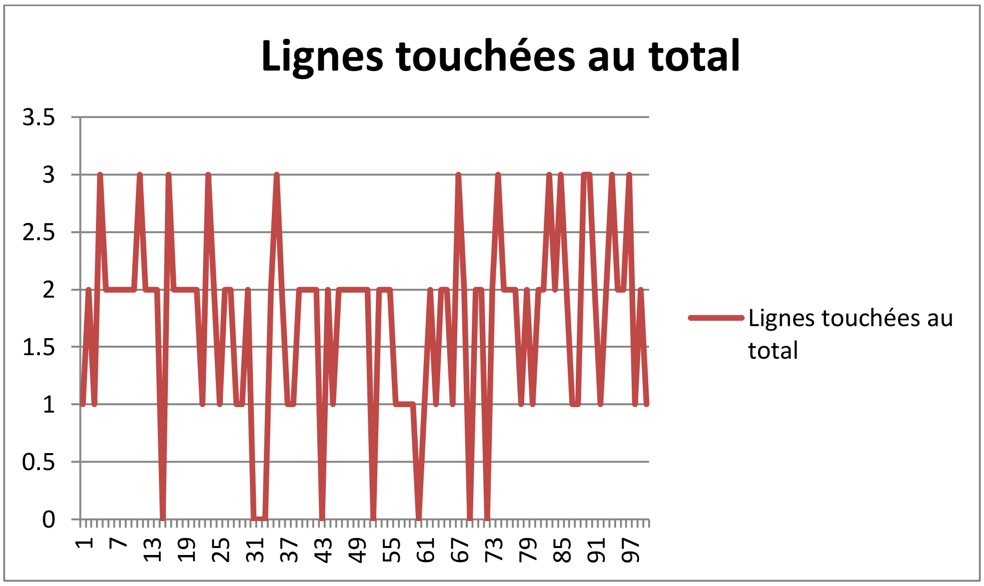
Question 1

Pour réaliser cette expérience nous avons pris comme données de départ :

- un spaghetti de longueur 10 cm
- des lames de largeur h = 4cm

Nous avons mené l'expérience 100 fois et collecté les résultats (cf. Annexe).

Voici un graphique présentant brièvement les résultats



On peut remarquer ici que le nombre de lignes touchées oscille entre 0 et 3. Ce qui est logique car notre spaghetti est de longueur finie.
A partir de ces résultats, nous avons réalisé une étude statistique, dont voici les résultats :

Donnée	*Résultat*	*Donnée*	*Résultat*
Total lignes touchées	172	**Médiane totale**	2
Total lignes touchées [AI]	84	**Médiane [AI]**	1
Total lignes touchées [IB]	88	**Médiane [IB]**	1
Espérance totale	1,72	**Ecart-type total**	0,805034663
Espérance [AI]	0,84	**Ecart-type [AI]**	0,465366153
Espérance [IB]	0,88	**Ecart-type [IB]**	0,537107856
1er Quartile	1	**Variance**	0,648080808
2eme Quartile	2		

Résultats de l'étude statistique

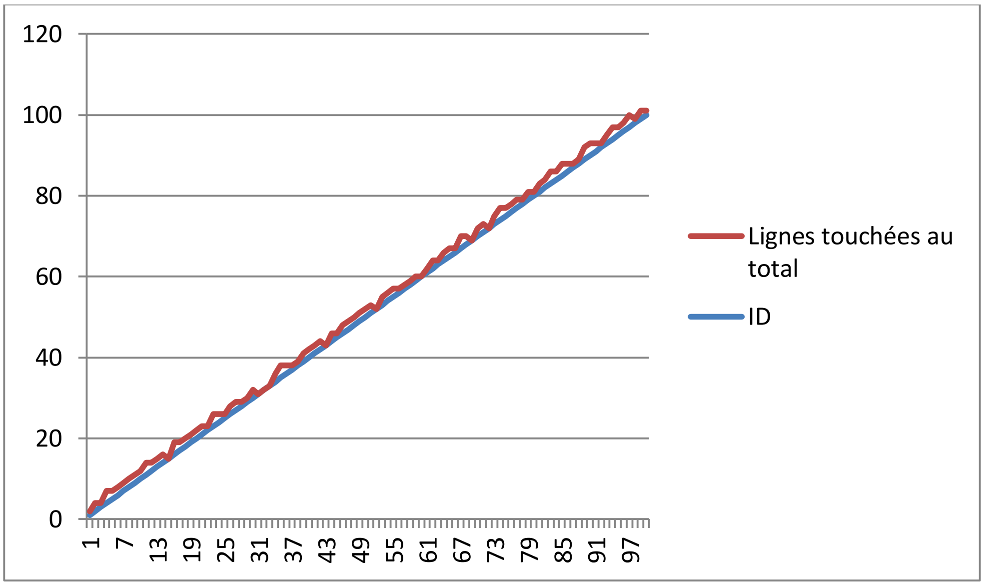
Pour le calcul de l'espérance nous avons utilisé la formule :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Ensuite, pour calculer l'écart-type et la variance nous avons utilisé :

$\sigma_X^2 = Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$ et $\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{E[X^2] - E[X]^2}$

Enfin, nous avons réalisé un graphique de l'accroissement de nos résultats :

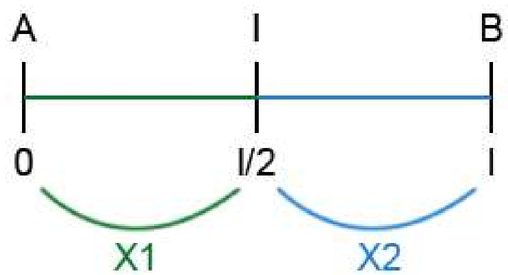


Accroissement des résultats

On peut remarquer grâce à ce graphique que l'accroissement semble assez linéaire.

Question 2

On suppose une courbe C ramenée à un segment de droite [AB]. On note I le milieu de [AB].
Soit X1 le nombre de points d'intersection de [AI] et X2 le nombre de points d'intersection de [IB].



Par définition, on a :

$$E(X1) = \sum_{0}^{\frac{l}{2}} xi * P(Xi = xi)$$

$$E(X2) = \sum_{\frac{l}{2}}^{l} xi * P(Xi = xi)$$

$$E(X) = \sum_{0}^{l} xi * P(Xi = xi)$$

On remarque que par le théorème de Chasles, on a :

$$E(X) = \sum_{0}^{\frac{l}{2}} xi * P(Xi = xi) + \sum_{\frac{l}{2}}^{l} xi * P(Xi = xi)$$

On en conclue que : $E(X) = E(X1) + E(X2)$

Les résultats trouvés lors de l'expérience de la question 1 sont en accord avec l'équation obtenue.

Question 3

Comme vu précédemment, $E(X) = 2 * E(X1)$ pour un polynôme à deux côtés. Pour un polynôme à « n » côtés on obtient :

$$E(X) = n * E(X1)$$

On doit prouver que $E(X) = kl$

La somme des côtés du polynôme équilatéral est égale à « l ». On en déduit donc :

$l = n * ds$, « ds » étant la longueur d'un côtés et « n » le nombre total de côtés

On translate alors cette formule dans la proportionnalité que l'on cherche à prouver

$$E(X) = \left(\frac{l}{ds}\right) * E(X1)$$

$$E(X) = k * l, \text{ avec } k = \left(\frac{1}{ds}\right) * E(X1)$$

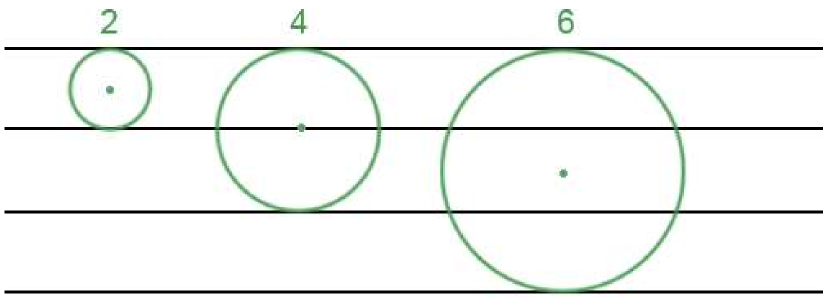
E(X) est donc bien proportionnel à « l ».

Question 4

On suppose que la courbe C soit un cercle de rayon « r ».

La variable aléatoire X devient constante quand :

Valeur de « r »	Valeur de « X »
$\boldsymbol{r = h\,/\,2}$	$X = 2$
$\boldsymbol{r = h}$	$X = 4$
$\boldsymbol{r = 2h}$	$X = 8$
$\boldsymbol{r = 3h}$	$X = 12$
Et ainsi de suite….	



On peut donc affirmer que : $\boldsymbol{X = \frac{4r}{h}}$
Et X est une constante pour : $\boldsymbol{r = \frac{1}{2} * k * h}$ **avec** $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}$

On sait que $E(X) = k * l$ avec $l = 2\,\pi\,r$
D'où : $E(X) = k * 2\,\pi\,r$

On sait que $X = Cste \;\; => E(X) = Cste$

On considère donc le cas : $X = 2$ donc on a $k = 1$ et $r = \frac{h}{2}$
Alors : $E(X = 2) = E(X) = k * 2\pi * r = 2\,\pi\,r = 2\pi * (\frac{h}{2}) \; = \pi * h$

On a donc $\boldsymbol{E(X) = \pi * h}$

De la définition vue précédemment : $E(X) = k * l$
On déduit : $k = \frac{\pi * h}{l} = \frac{h}{2r}$
Soit donc : $\boldsymbol{k = \frac{h}{2r}}$

Question 5

Pour la mise en place du programme visant à estimer le nombre π, on commence par générer 100 cas aléatoires. Pour cela, on fait varier 2 éléments :

- **Le point sur le parquet** comme origine de la courbe C, compris entre 0 et h.
- **L'angle**, compris entre 0 et 2π.

Une fois que l'on a ces 100 cas aléatoires, on calcule l'espérance, la médiane, le premier quartile et le troisième quartile.

Pour finir, pour faire estimation du nombre π, qui est égale à l'inverse de la moyenne pour les cas où : $h = 2 * l$.

On trouve des valeurs comprises entre 3.08 et 3.22, ce qui reste très proche de la valeur réelle de π. En effectuant plus de lancers, on s'approche plus précisément de π.

Question 6

En statistique l'écart type est estimé en prenant la racine carrée de l'estimateur de la variance notée Sn^2.

$$Sn^2 = \left(\frac{1}{n}\right) * \sum_{1}^{n} (Xi - \overline{X})^2$$

$$Sn^2 = \frac{1}{n} * \sum_{1}^{n} (Xi^2) - \overline{X}^2$$

D'où l'estimation de σ : $\sigma \approx \sqrt{Sm^2} \approx Sm^2$

- $p(Zn \in [E(X) - \varepsilon, E(X) + \varepsilon]) \geq 95\%$

⇨ Trouver C.

Soit $\varepsilon > 0 \in \mathbb{R}$. On a :

$$Zn = \frac{1}{n} * \sum_{1}^{n} Xi$$

Soit $\overline{Xi}$ la moyenne de Xi.

=> $P(|Zn - \overline{Xi}| > \varepsilon)$