T.A.I. de probabilités

Groupe : **Date :** L2 automne 2011

Le travail sera effectué par groupe de trois personnes faisant *impérativement* partie du même groupe de TD. Les délégués seront chargés de communiquer la liste et la composition de ces groupes par mail à `erwan.penchevre@aliceadsl.fr` impérativement avant Noël.

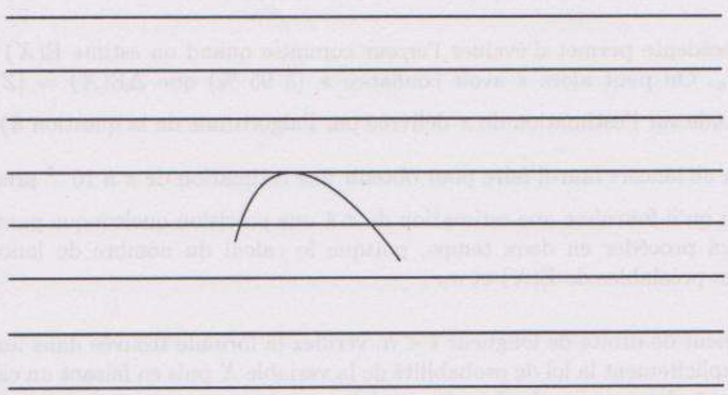
La soutenance orale, pour le TAI, durera vingt minutes par groupe de trois personnes, chacun devant parler environ cinq minutes. Il y aura tableau, craies, vidéoprojecteur (pour utilisez le vidéoprojecteur, venez avec votre propre ordinateur).

Le rapport écrit sera remis le 5 janvier 2011 au plus tard, à l'accueil ; les soutenances auront lieu ensuite entre le 11 et le 20 janvier. La soutenance orale doit être conforme au texte du rapport.

Si vous avez utilisé des sources extérieures (consultation d'un livre, d'une encyclopédie, d'un site Internet, d'une tierce personne, *etc.*), indiquez-les de manière détaillée en annexe à votre rapport ainsi que dans votre exposé oral.

Le but de ce travail est d'utiliser l'expérience aléatoire décrite dans la question **1)** ci-dessous afin d'obtenir une estimation de la constante mathématique π. Il est fortement conseillé de suivre l'ordre des questions (aussi bien dans votre rapport que lors de la soutenance).

1) On lance au hasard un arc de courbe $\mathcal{C}$ plan et rigide, une sorte de spaghetti cru et courbe, de forme quelconque et de longueur ℓ, sur un parquet. Les lames de bois de largeur h qui constituent le parquet ont des bords rectilignes, parallèles. On note X le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec les bords des lames du parquet. Vous avez suivi des cours de statistiques en L1. Choisissez donc une courbe $\mathcal{C}$ particulièrement simple (par exemple un segment de droite), et décrivez comment vous mèneriez une étude statistique de la variable X. Eventuellement, réalisez vous-mêmes l'expérience ; sinon, expliquez comment vous pourriez la réaliser, jusqu'à la collecte des données puis leur analyse.



Exemple : $X = 3$

2) Admettons désormais qu'il existe un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ décrivant cette expérience. Dans un premier temps, supposons que la courbe $\mathcal{C}$ est un segment de droite [AB]. Soit I le milieu de [AB]. Soit X_1 le nombre de points d'intersection du segment [AI] avec les bords des lames de parquet, et X_2 le nombre de points d'intersection du segment [IB] avec les bords des lames. Comparer $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(X_1)$, $\mathrm{E}(X_2)$.

3) Supposons maintenant que la courbe $\mathcal{C}$ est un polygone équilatéral. Montrer que $\mathrm{E}(X)$ est proportionnel à ℓ :

$$\mathrm{E}(X) = k\ell$$

Généralisation à une courbe $\mathcal{C}$ quelconque de longueur ℓ ? *Indication :* on assimilera la courbe à un polygone équilatéral ayant une infinité de côtés de longueur ds.

4) Supposons maintenant que la courbe $\mathcal{C}$ est un cercle de rayon r. Montrez que, pour certaines valeurs de r, la variable aléatoire X est en fait une constante. Que vaut alors $\mathrm{E}(X)$? En déduire la valeur de k.

5) Faire le lien avec l'étude statistique de la question **1)** : choisir une courbe $\mathcal{C}$ particulièrement simple (par exemple un segment de droite), puis montrer comment estimer statistiquement $\mathrm{E}(X)$, et donc k. En déduire un procédé délivrant une estimation de la constante π, circonférence du cercle de rayon unité. Réalisez l'algorithme dans un langage de programmation de votre choix.

Indication : il faudra alors réfléchir à ce que signifie « lancer au hasard » pour concevoir un simulateur qui utilise un générateur de nombres aléatoires (fonction *random*). Par exemple, on peut décider que « lancer au hasard » consiste à choisir successivement :

(i) un point au hasard sur le parquet comme origine de la courbe $\mathcal{C}$

(ii) une direction au hasard c'est-à-dire un angle compris entre 0 et 2π

6) On lance à présent n courbes $\mathcal{C}$ identiques. Soit X_i le nombre de points d'intersection de la $i^{\text{ème}}$ courbe avec les bords des lames. Soit Z_n la variable aléatoire définie par :

$$Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

(c'est le nombre moyen de points d'intersection). Le théorème *central limit* (que l'on admettra) affirme que pour n grand, la variable Z_n suit approximativement une loi normale de paramètres μ, σ avec

$$\mu = \mathrm{E}(X)$$

$$\sigma = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

Expliquez comment estimer statistiquement σ_X. Au moyen d'une table de loi normale, trouver un réel positif ε dépendant de n et de σ_X, tel que

$$p\,(Z_n \in [\mathrm{E}(X) - \varepsilon, \mathrm{E}(X) + \varepsilon]) \gtrsim 95\ \%$$

7) La question précédente permet d'évaluer l'erreur commise quand on estime $\mathrm{E}(X)$ au moyen de la variable aléatoire Z_n. On peut alors « avoir confiance » (à 95 %) que $\Delta\mathrm{E}(X) = |Z_n - \mathrm{E}(X)| < \varepsilon$. Notons $\Delta\pi$ l'incertitude sur l'estimation de π délivrée par l'algorithme de la question **5)**. Comparez $\dfrac{\Delta\pi}{\pi}$ et $\dfrac{\Delta\mathrm{E}(X)}{\mathrm{E}(X)}$. Combien de lancers faut-il faire pour obtenir une estimation de π à 10^{-4} près ? Perfectionnez votre algorithme afin qu'il fournisse une estimation de π à une précision quelconque passée en argument.
Indication : il faudra procéder en deux temps, puisque le calcul du nombre de lancers requiert des estimations grossières préalables de $\mathrm{E}(X)$ et σ_X.

8) Si $\mathcal{C}$ est un segment de droite de longueur $\ell < h$, vérifiez la formule trouvée dans les questions **3)** et **4)** en déterminant explicitement la loi de probabilité de la variable X puis en faisant un calcul d'espérance *(question à traiter après le cours sur les lois de couple)*.