Elect 1/3

08.03.10

Electrostati°

I - Introduction

L'electrostati° étudie l'ens des phénomènes liés à la présence des charges électri° immobiles ds un réfé (R) du labo (fixe).

II - Charges électri°

1) Particules élément°

Il en existe 2 types : charges > 0 et charges < 0.

exemple : $q_e = -e$ $\quad e > 0 : 1,6 \times 10^{-19}$ C , e charge élément°

$q_p = +e$

Rem° : $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$ kg $\quad m_p \approx m_n = 1,7 \times 10^{-27}$ kg

2) La charge électri° est additive : mesurée par un nb algébri°

3) Quantificat° de la charge

La charge électri° q de tt corps est un multiple entier de la charge élément° ⇒ On peut écrire : $q = ne \quad n \in \mathbb{Z}$.

4) Les atomes

La matière est constituée d'atomes.

$^{A}_{Z}X$

Noyau : constitué de Z protons et (A-Z) neutrons.

Z → numéro atomique - A : nb de masse.

Charge de l'atome : le noyau comprend (Ze) charges } $q_{at} = Ze - Ze = 0$

le nuage électri° —— (-Ze) —— } L'atome est électriquem° neutre.

5) Les ions

L'atome peut : · capter des e^- → chargé $<0^t$ → anion Cl^-

· céder des e^- → chargé $>0^t$ → cation H^+

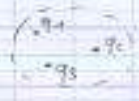
6) Milieu matériel

Isolant : atome dont les e^- de valence st liés.

Conducteur : —————— libres.

7) - Distribut° de charges

2 types :

- Distribu de charges ponctuelles : 
- ——————— continues :

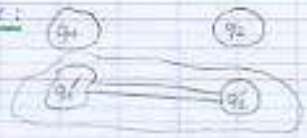
↳ linéique $\lambda = \frac{dq}{dl}$ (C / m)

↳ surfaci° $\sigma = \frac{dq}{dS}$ (C / m²)

↳ volumi° $\rho = \frac{dq}{dV}$ (C / m³)

8) Principe de la conservat° de la charge.

La charge totale d'un système électriquem° isolé reste cste.

Ex : 

$$q_1' + q_2' = q_1 + q_2$$

III - Forces électrostati°

1 - Loi de Coulomb

Soient 2 charges ponctuelles q_1 et q_2.

$\vec{M_1M_2} = \vec{r} = r\,\vec{u_{12}}$

L'interact° entre 2 charges q_1 et q_2 distante de r est donnée par : $\boxed{\vec{F_{12}} = k\,\frac{q_1 q_2}{r^2}\,\vec{u_{12}}}$

$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ cste universelle de Coulomb

ε_0 → perméabilité du vide

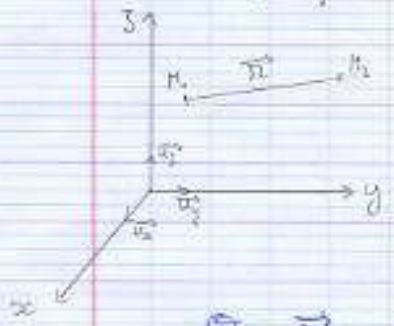
$k = 9.10^9$ SI

Caractéristi° de $\vec{F_{12}}$:

- Direct° : portée par la dte qui joint les 2 charges q_1, q_2.
- Sens : si q_1 et q_2 de m̂ signe ⇒ $q_1q_2 > 0$ ⇒ $\vec{F_{12}}$ de m̂ sens que $\vec{u_{12}}$

  ——————— signes opposés, $q_1q_2 < 0$ ⇒ $\vec{F_{12}}$ de sens opposé à $\vec{u_{12}}$.
- Norme : $|\vec{F_{12}}| = F_{12} = \frac{k\,|q_1q_2|}{r^2}$
- Pt d'applicat° : là où est situé la charge qui subit.

2) Composantes de $\vec{F_{12}}$ en coordo carté



$\vec{F_{12}}$ ds la base $(\vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z})$ calcul :

$$\vec{F_{12}} = F_x \vec{u_x} + F_y \vec{u_y} + F_z \vec{u_z} \quad . \quad |F_{12}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

On a : $\vec{F_{12}} = K \dfrac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u_{12}} = K \dfrac{q_1 q_2}{r^2} r \vec{u_{12}} = K \dfrac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}$

On $\vec{r} = \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$ $\quad M_1 \left| \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{matrix} \right. \quad M_2 \left| \begin{matrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{matrix} \right.$

$\vec{r} \left| \begin{matrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{matrix} \right.$

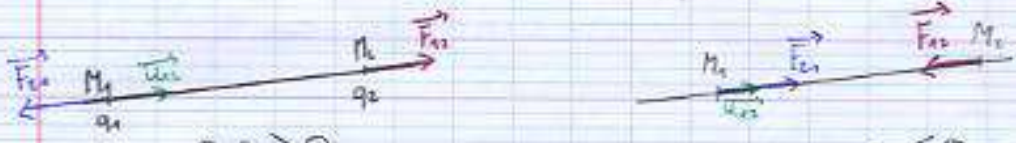
D'où $\vec{r} = (x_2 - x_1)\vec{u_x} + (y_2 - y_1)\vec{u_y} + (z_2 - z_1)\vec{u_z}$

$|\vec{r}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

$$\vec{F_{12}} = K \frac{q_1 q_2}{r^3} \left[(x_2 - x_1)\vec{u_x} + (y_2 - y_1)\vec{u_y} + (z_2 - z_1)\vec{u_z} \right]$$

$$\vec{F_{12}} \left| \begin{matrix} F_x = K \dfrac{q_1 q_2}{r^3}(x_2 - x_1) \\ F_y = K \dfrac{q_1 q_2}{r^3}(y_2 - y_1) \\ F_z = K \dfrac{q_1 q_2}{r^3}(z_2 - z_1) \end{matrix} \right.$$

3) Principe des actions réciproques



$q_1 q_2 > 0$ $\qquad$ $q_1 q_2 < 0$

$$\vec{F_{12}} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u_{12}}$$

<u>Le principe des actions réciproques</u> : $\vec{F_{12}} = -\vec{F_{21}}$

↳ 2 charges de m̂ signe, se repoussent.

↳ ——— signes opposés, s'attirent.

4) Expression de la loi de Coulomb ds un milieu ≠ du vide

Vide $\vec{F_{12}} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u_{12}}$

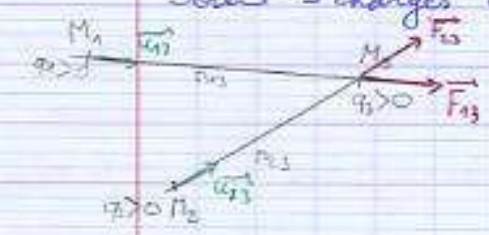
milieu $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \rightarrow \vec{F_{12}} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \dfrac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u_{12}}$

ε_r : permittivité relative ss dimension

H_2O : $\varepsilon_r \simeq 80$

5) Forces d'intéract° pr un ensbl de charges électriques

Soient 3 charges q_1, q_2, q_3. Déterminons l'act° exercée par q_1 et q_2 sur q_3.



La force exercée par q_1 sur q_3 est : $\vec{F_{13}} = K \frac{q_1 q_3}{(r_{13})^2} \vec{u_{13}}$

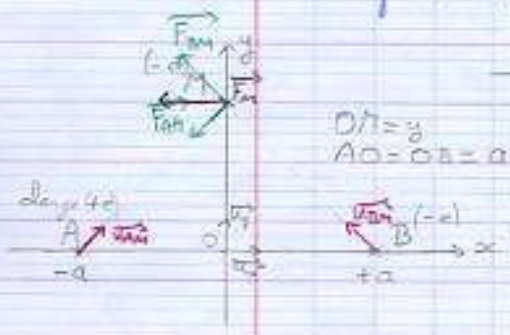
——— q_2 sur q_3 ——— : $\vec{F_{23}} = K \frac{q_2 q_3}{(r_{23})^2} \vec{u_{23}}$

$\Rightarrow$ Le principe de superposit° se traduit par : $\boxed{\vec{F_3} = \vec{F_{13}} + \vec{F_{23}}}$

De façon gnrl $\boxed{\vec{F_j} = \sum_{\substack{i \neq j \\ i=1}}^{n} \vec{F_{ij}}}$

j : particule qui subit l'act° des autres particules

n : nb de particules qui s'exercent sur j.



Déterminer la force exercée par les charges situées en A et B, sur celle en M.

$$\vec{F_M} = \vec{F_{AM}} + \vec{F_{BM}} = (F_{AMx} + F_{BMx})\vec{u_x} + (F_{AMy} + F_{BMy})\vec{u_y}$$

$$\vec{F_{AM}} = K \frac{q_A q_M}{(AM)^2} \vec{u_{AM}} = K \frac{q_A q_M}{AM^3} AM \vec{u_{AM}} = K \frac{q_A q_M}{AM^3} \vec{AM} = -\frac{K e^2}{(\sqrt{a^2+y^2})^3}(a\vec{u_x} + y\vec{u_y})$$

$$\vec{F_{BM}} = K \frac{e^2}{(\sqrt{a^2+y^2})^3}(-a\vec{u_x} + y\vec{u_y})$$

$$\boxed{\vec{F_M} = \frac{-2Ke^2 a}{(a^2+y^2)^{3/2}} \vec{u_{xx}}}$$

$y \to 0$ $F_M = -\frac{2ke^2}{a^2}$; $y \to +\infty$ $F_M = 0$

IV. Chp électrostati°

1. Def

Une charge q placée ds l'espace modifie les pptés l° de cette espace.

Cette modificat° est décrite par :

- le chp électrostati° grandeur vectorielle $\vec{E}$.
- le potentiel électrostati° ——— scal° V.

Electro
2/3

08.01.10 (2) $\vec{E}$: chp électrostati° — V : potentiel électrostati°

IV – 2. Chp électrostati° créé par une charge ponctuelle

La force exercée par q_1 sur q_2 est : $\vec{F_{12}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u_{12}}$

Le vecteur chp électro° créé par q_1 est défini par : $\vec{E}(M) = \frac{\vec{F}}{q_2} = k\frac{q_1}{r^2}\vec{u_{12}}$

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}\cdot\vec{u}} = K\frac{q}{r^2}\vec{u}$$

3 – Dimension, unités

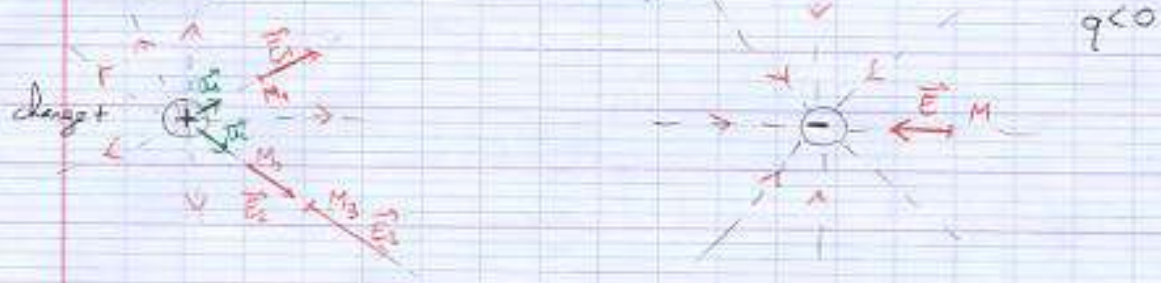
dimension $[E] = M L T^{-3} I^{-1}$ | M : masse (kg) | T : tps (s)

unité de E = Volt/m = $V.m^{-1}$ | L : longueur (m) | I : courant (A)

4 – Sens et direct° de $\vec{E}$

5 – Lignes de chp

Les lignes de chp st tangentes en tt pt de $\vec{E}$ et orientées ds le sens de $\vec{E}$.



Soient 2 charges q_1 et q_2 en interaction :

6- Chp électrostat° créé par un ensbl de charges ponctuelles

Principe de superposition :

Cas de 3 charges ponctuelles :

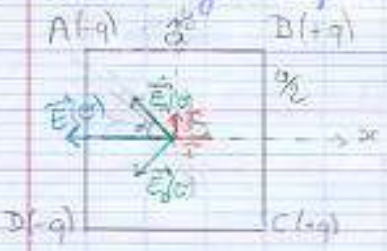
$$\vec{E}(M) = \vec{E_1} + \vec{E_2} + \vec{E_3}$$

Généralisation :

n charges ponctuelles, le vecteur chp résultant est donné par : $\boxed{\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{n} \vec{E_i}}$ principe de superposit°

Application :

Soit la configurat° suivante : 4 charges situées sur les 4 sommets d'un carré. Déterminez le vect chp électrostat° au pt créé par les 4 charges au pt O.



$\vec{E_A}(O) = \vec{E_C}(O)$
$\vec{E_B}(O) = \vec{E_D}(O)$

$\vec{E_A}(O) = -E_A \cos\alpha\, \vec{i} + E_A \sin\alpha\, \vec{j}$

$\vec{E_B}(O) = -E_B \cos\alpha\, \vec{i} - E_B \sin\alpha\, \vec{j}$

$\vec{E_C}(O) = -E_C \cos\alpha\, \vec{i} + E_C \sin\alpha\, \vec{j}$

$\vec{E_D}(O) = -E_D \cos\alpha\, \vec{i} - E_D \sin\alpha\, \vec{j}$

$AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$E_A = \frac{kq}{d^2} = E_B = E_C = E_D$

$\vec{E}(O) = (-E_A - E_B - E_C - E_D)\cos\alpha\, \vec{i} + (E_A - E_B + E_C - E_D)\sin\alpha\, \vec{i}$

$\vec{E}(O) = -4 E_A \cos\alpha\, \vec{i}$

7- Chp crée par une distribu de charges continues

Soit un corps dont les dimensions ne peuvent ê assimilées à une charge ponctuelle, ce corps est subdivisé en élt élément° portant une charge élément° dq et appliquons le principe de superposit° aux charges élément° qui constituent ce corps.

Le chp élément° $d\vec{E}$ créé en M par la charge élément° "dq" est donné par la loi de Coulomb : $d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{u}$

Le chp résultant est la Σ vectorielle continue (intégrale).

Distribu linéique : $dq = \lambda dl \Rightarrow d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda . dl}{r^2} \vec{u} \Rightarrow \vec{E} = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} \vec{u}$

——— surface : $dq = \sigma dS \Rightarrow \vec{E} = \iint_{(S)} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma dS}{r^2} \vec{u}$

——— volume : $dq = \rho dV \Rightarrow \vec{E} = \iiint_{(V)} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho dV}{r^2} \vec{u}$

Rem° : Le calcul du chp à partir des intégrales est svt pénible, il conviendra d'exploiter les symétries des distribut° de charges qd elles existent.

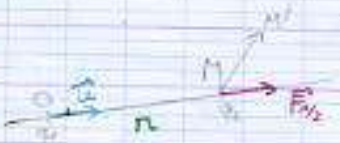
V. Invariances et Symétries : (cf TD)

VI. Potentiel électrostati°

1. $\vec{W}$ de la force électrostati°

Soient une charge q_1 placée en O.

——— q_2 mobile.



une force $\vec{F}_{1/2}$ exercée par q_1 sur q_2

$\vec{MM'}$ vecteur déplacem°

$\boxed{\delta W = \vec{F}_{1/2} . \vec{dl}}$

par déf : le $\vec{w}$ élément° δW est donné par : $\delta W = \vec{F}_{1/2} . \vec{dl}$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{F}_{1/2} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u} \\ \vec{MM'} = \vec{dl} = dr\, \vec{u_r} + r\, d\theta\, \vec{u_\theta} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{F}_{1/2} . \vec{dl} = \frac{k q_1 q_2}{r^2} \vec{u} . (dr\, \vec{u_r} + r d\theta\, \vec{u_\theta}) = \frac{k q_1 q_2}{r^2} . dr$$

$$\delta W = k q_1 q_2 \frac{dr}{r^2} \Rightarrow W_{M \to M'} = \int k q_1 q_2 \frac{dr}{r^2} = k q_1 q_2 \int_r^{r'} \frac{dr}{r^2}$$

$$W_{M \to M'} = k q_1 q_2 \left[-\frac{1}{r} \right]_r^{r'} = k q_1 q_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right)$$

Rem° : L'expression de $W_{M \to M'}$ montre que $W_{F_{1/2}}$ ne dépend pas du chemin suivi.

2- Ep électrostati° d'interact°

La force étant conservative, l'Em est conservée.

$$\left.\begin{array}{l}\Delta E_m = 0 = \Delta E_p + \Delta E_c \\ \boxed{\text{T.h de l'Ec : } \Delta E_c = W_{\vec{F}_{12}}}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\Delta E_p = -W_{\vec{F}_{12}}}$$

$$\Leftrightarrow E_p(M') - E_p(M) = -K q_1 q_2 \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right]$$

$$E_p(r') - E_p(r) = K q_1 q_2 \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right)$$

On identifie : $E_p(r) = K \frac{q_1 q_2}{r} + cste$

On a : $E_p(\infty) = 0 = cste$

D'où $\boxed{E_p(r) = K \frac{q_1 q_2}{r}}$

Pour résumer : Interact° entre q_i et q_j : $E_p(q_i, q_j) = \frac{K q_i q_j}{r_{ij}}$

——— (q_1, q_2, q_3) : $E_p(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} K \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$

$= K \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + K \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + K \frac{q_1 q_3}{r_{13}}$

$$\boxed{\text{Généralisat° : } E_p(q_1, q_2, \ldots q_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} K \frac{q_i q_j}{r_{ij}}}$$

3- Relation entre $\vec{F}$ et E_p

$\boxed{\delta W = \vec{F} \cdot \vec{dl} = -dE_p}$ $\qquad \vec{F} = -\vec{grad}\, E_p$

Coordo cartésiennes : $\vec{grad}\, E_p = \left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\right)_{y,z} \vec{e_x} + \left(\frac{\partial E_p}{\partial y}\right)_{x,z} \vec{e_y} + \left(\frac{\partial E_p}{\partial z}\right)_{x,y} \vec{e_z}$

——— cylindri° : $\vec{grad}\, E_p = \left(\frac{\partial E_p}{\partial r}\right)_{\theta,z} \vec{e_r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial E_p}{\partial \theta}\right)_{r,z} \vec{e_\theta} + \left(\frac{\partial E_p}{\partial z}\right)_{r,\theta} \vec{e_z}$

Electro

3/3

22.09.10

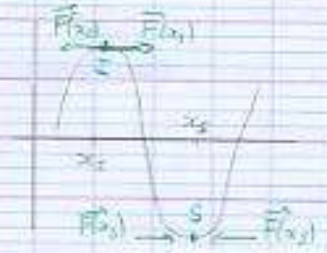
VI 4) Détermination de l'équilibre d'une charge à l'aide de E_p

Equilibre $\Leftrightarrow \vec{F} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \text{grad}\,\vec{E_p} = \vec{0}$

Soit $F(x)$ // à $Ox \Rightarrow F = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial E_p}{\partial x} = 0$ ∃ d'extremum

↳ maxi ↳ mini



S : minimum $\Leftrightarrow \left.\frac{\partial^2 E}{\partial^2 x}\right|_{x=x_S} > 0$ E_p stable

I : maximum $\Leftrightarrow \left.\frac{\partial^2 E}{\partial^2 x}\right|_{x=x_I} < 0$ E_p instable

5) Potentiel électrostat°

L'E_p d'intéract° entre q_1 et q_2 : $E_p(r) = k\frac{q_1 q_2}{r}$

On déf au pt M une fct scal° $V(r)$ indépendante de q : $V(r) = k\frac{q_1}{r}$

potentiel électrost° en Volt

$E_p(r) = q_2 . V(r)$

Surfaces équipotentielles : st les surfaces sur lesquelles $V(r)$ est cst

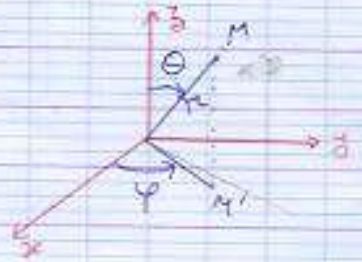
Exemple : pr une charge ponctuelle les surfaces équipotentielles correspondent à des sphères concentriques

surface équipot

Relat° entre $\vec{E}$ et V :

$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)$: $q_1\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(qV) \Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)}$

Coords cart° : $\begin{cases} E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \\ E_\theta = -\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial V}{\partial \theta} \\ E_\varphi \end{cases}$ $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$



6) Potentiel créé par un ens de charges ponctuelles

ens de charges : $V(M) = \sum_{i=1}^{n} V(q_i)$

$$V(M) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{r_i}$$

Application :

$$V(O) = V(A) + V(B) + V(C) + V(D)$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-q}{d} + \frac{q}{d} + \frac{q}{d} - \frac{q}{d}\right)$$
$$= 0$$

Remq : On ne peut passer du vecteur $\vec{E}$ au scal° V (et réciproqu°) que si les grandeurs st des fcts et non des valeurs ponctuelles.

VII - Théo de Gauss

1) Déf du flux

Soit une surface Σ plane placée dans un chp électro°.

Soit dS un élt de surface orienté par le vecteur unitaire "$\vec{n}$".

$\vec{n}$: vect unit° normal sortant à la surface S.

On appelle flux du vect chp électro° à travers dS, le produit scalaire noté $d\phi$: $\boxed{d\phi = \vec{E}.\vec{dS} = \vec{E}.\vec{n}.dS}$

Le flux ϕ à travers la surface totale S : $\boxed{\phi = \iint \vec{E}.\vec{dS}}$

2) Th de Gauss

Le flux du chp électro° à travers une surface fermée S est : $\boxed{\phi = \oiint_{S} \vec{E}.\vec{dS} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}}$

$\sum Q_{int}$ → soit des charges contenues ds la surface

ε_0 → permittivité du vide

3) Application

Principe de calcul :

La th de G. se révèle à un outil très puissant et très simple à utiliser pour calculer la norme du vect chp électrostati° créé par une distribut° de charges continues à haute symétrie (sphère, cylindre, cube ...)

Rem^ce : Lorsque la distribu de charges ne présente pas de hautes sym revenir au calcul direct (loi de Coulomb).

Invariances et symétries

Principe de Curie : Un chp électrostati° possède les ppties d'invariances et de sym de la distribu de charge qui le crée.

Invariances : une distribu de charges est dite invariante par une transformat° (rotation ou translat°) si celle-ci la laisse identique à elle-m^me.

(r, θ, z)

si cylindre ∞ θ

* par translat° //^le à l'axe
* par rotat° autour de l'axe

but : Déterminer la nbre de variable

Symétries :

* sym plane
* antisym plane

but : Déterminer la direction de $\vec{E}$

Exercice d'aplication

Soit un cylindre ∞ de rayon R, d'axe $z'Oz$, il est chargé uniformém^t en volume avec une densité de charge $\rho > 0$. Calculer le chp électrostati° $\vec{E}$ en tt pt de l'espace.

⊙ Inv et sym : E ne dépend que de r, suivant $\vec{u_r}$

	Surfaces	Volume
cylindre	$2\pi r h$	$\pi r^2 h$
sphère	$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$
cube	a^2	a^3

Etape 1 : Analyse des inv et sym

$\vec{E}(r,\theta,z) = E_r(r,\theta,z)\,\vec{u_r} + E_\theta(r,\theta,z)\,\vec{u_\theta} + E_z(r,\theta,z)\,\vec{u_z}$

Inv
- ↳ Invariance par rotat° autour de l'axe zOz' : $\forall\theta\ \vec{E}(r,\theta,z) = \vec{E}(r,z)$
- ↳ " " translat° le long de zz' : $\vec{E}(r,\theta,z) = \vec{E}(r,\theta)$

$\Rightarrow \vec{E}(r,\theta,z) = \vec{E}(r)$

Sym
- ↳ le plan Π qui contient M et passant par l'axe zz'
- ↳ ——— Π' ——— $\perp$ à l'axe zz'

$\Rightarrow$ L'intersect° de ces 2 plans indiquent que $\vec{E}(r)$ porté par $\vec{u_r}$.

Donc $\vec{E}(r,\theta,z) = E_r(r)\,\vec{u_r}$

Etape 2 : Choix de la surface fermée

Doit 2 fermée, et doit passer par le pt M où on cherche $\vec{E}$.

Considérons le cylindre de rayon $OM = r$, et de hauteur h

Calcul de Φ à travers les surfaces : $\Phi = \underbrace{\oiint \vec{E}(r)\cdot\vec{dS_1}}_{=0} + \underbrace{\oiint \vec{E}(r)\cdot\vec{dS_2}}_{=0} + \oiint \vec{E}(r)\cdot\vec{dS_3}$

$\Phi = \oiint E_r(r)\,\vec{u_r}\cdot dS_3\,\vec{u_r} = \oiint E_r(r)\cdot dS_3 = E_r(r)\cdot S_3 = E_r(r)\cdot 2\pi r h$

$\Phi = E(r)\cdot 2\pi r h$

$\Phi = \frac{\sum Q_i}{\varepsilon_0}$

1er cas : $r < R$

$Q_{int} = \iiint \rho\, dV = \rho V = \rho \pi r^2 h$

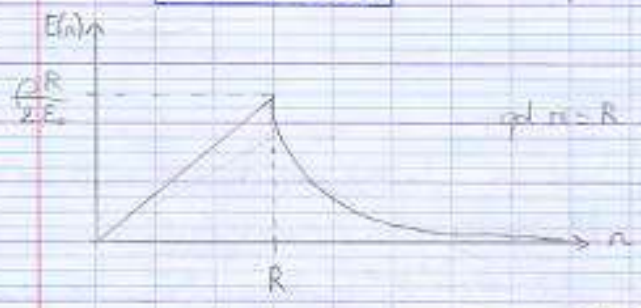
$\Rightarrow E(r)\cdot 2\pi r h = \frac{\rho \pi r^2 h}{\varepsilon_0}$

$$\boxed{E(r) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}}$$

2e cas $r > R$:

$Q_{int} = \iiint \rho\, dV = \rho V = \rho \pi R^2 h$

$$\boxed{E(r) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}}$$



qd $r = R$ on a $r > R$ et $r < R \Rightarrow E$ continue

$\vec{E} = -\vec{grad}(V)$

$(V(0) = 0)$ $\quad dV = -E(r)\,dr$

$r < R$

$\int_{V(0)}^{V(r)} dV = -\int_0^r \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\,dr$

$V(0) = 0$

$$\boxed{V(r) = -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon_0}}$$

$r > R$: $V(r) - V(R) = -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\int_R^r \frac{dr}{r} = -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln\frac{r}{R}$

$\Rightarrow V(r) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln\frac{R}{r} + V(R)$

$V(R) = -\frac{\rho R^2}{4\varepsilon_0}$

$$\boxed{= \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\left(\ln\frac{R}{r} - 1\right)}$$