# Onde électromagnétique L2

## Plan du cours :


**Onde électromagnétique, équations de Maxwell** **2**

=> Introduction : Outils mathématiques 2

I. Opérateurs (coordonées cartésiennes) 2

1) Gradient 2

2) Divergence : div 2

3) Rationnel : $\boldsymbol{rot}$ 2

4) Opérateur Laplacien : $\boldsymbol{\Delta}$ 3

II/ Transformation d'intégrales 3

1) Théorème de la divergence 3

2) Théorème du relationnel (théorème de Stokes) 3

=> Cours 4

I/ Définition d'une onde électromagnétique 4

II/ Equations de Maxwell et interprétation 6

**Chapitre 2 : Propagation d'onde électromagnétique dans le vide (ou dans l'air)** **8**

I/ Equations de Maxwell dans le vide 8

II/ Equations de D'Alembert et solutions 8

1) Equations de D'Alembert 8

2) Solution des équations de D'Alembert 9

III/ Ondes planes (rappel : dans le vide ou l'air) 10

1) Définition 10

2) Propriétés d'ondes planes 11

IV/ Ondes planes progressives sinusoïdales (OPPS) 12

1) Grandeurs caractéristiques d'une OPPS 13

2) Généralisation 16




MONJAUD Robin
LAHOUD Pamela
EFREI - L2 - Promo 2014
Mme TABBI

# Onde électromagnétique, équations de Maxwell

2h = 5 min/page

## => Introduction : Outils mathématiques

## I. Opérateurs (coordonées cartésiennes)

### 1) Gradient

Appliqué à une fonction $\overrightarrow{grad}(f) = \vec{\nabla}(f)$

L'opérateur « nabla » :$\vec{\nabla}$ avec $\vec{\nabla}\begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta x} \\ \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta z} \end{pmatrix}$ => $\vec{\nabla}(f) = \overrightarrow{grad}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\delta f}{\delta x} \\ \frac{\delta f}{\delta y} \\ \frac{\delta f}{\delta z} \end{pmatrix}$

### 2) Divergence : div

L'application en produit scalaire de $\vec{\nabla}$ à un vecteur

$$div(\vec{\nabla}) = \vec{\nabla}.\vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta x} \\ \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta z} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \frac{\delta V_x}{\delta x} + \frac{\delta V_y}{\delta y} + \frac{\delta V_z}{\delta z} = scalaire$$

### 3) Rotationnel : $\overrightarrow{rot}$

Ne s'applique qu'à des vecteurs $\overrightarrow{rot}(\vec{V}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{V}$ (vecteur).

$$= \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta x} \\ \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\delta V_z}{\delta y} - \frac{\delta V_y}{\delta z} \\ \frac{\delta V_x}{\delta z} - \frac{\delta V_z}{\delta x} \\ \frac{\delta V_y}{\delta x} - \frac{\delta V_x}{\delta y} \end{pmatrix}$$

## 4) Opérateur Laplacien : Δ

Il est utilisé dans les équations de propagation du champ électromagnétique.
Il s'applique à un vecteur$\Delta\vec{V}$ ou à une fonction $\Delta f$ (scalaire)

Appliqué à une fonction $f(x,y,z)$:

$$\Delta f = \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 f}{\delta z^2}$$

Appliqué à un vecteur :

$$\vec{V}\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} : \Delta\vec{V} = \begin{pmatrix} \Delta V_x \\ \Delta V_y \\ \Delta V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\delta^2 V_x}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 V_x}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 V_x}{\delta z^2} \\ \frac{\delta^2 V_y}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 V_y}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 V_y}{\delta z^2} \\ \frac{\delta^2 V_z}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 V_z}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 V_z}{\delta z^2} \end{pmatrix}$$

# II/ Transformation d'intégrales

(Utilisées pour retrouver les quatre équations de Maxwell)

## 1) Théorème de la divergence

(Théorème de Gruen-Ostrogradski)

Pour $\vec{V}$ quelconque : $\oiint_S \vec{V}.\vec{dS} = \iiint div(\vec{V})d\tau.$

## 2) Théorème du relationnel (théorème de Stokes)

Pour un vecteur quelconque $\vec{V}$ :

$$\oint_C \vec{V}.\vec{dl} = \iint_S \overrightarrow{rot}(\vec{V}).\vec{dS}$$

## => Cours

# I/ Définition d'une onde électromagnétique

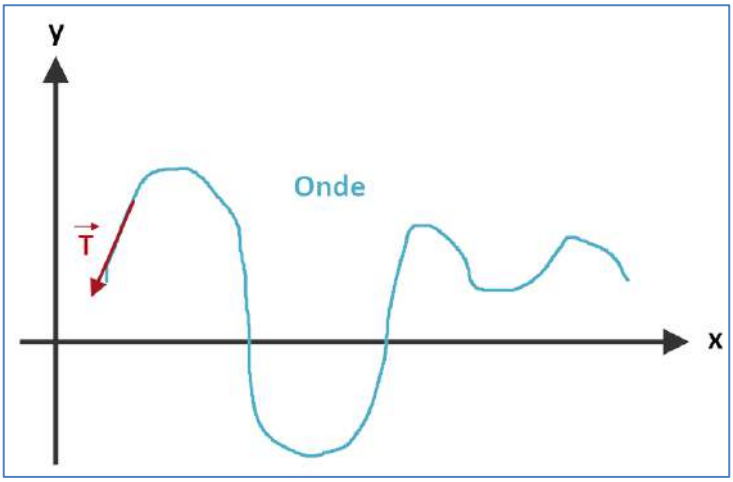
Une onde est une perturbation qui se propage en transportant de l'énergie et de la quantité de mouvement.

### Rappel : Onde sonore :

Variation de la pression dans le temps et dans l'espace.
- matérielle : a besoin d'un milieu matériel pour se propager
- longitudinale

- Equation de propagation d'une onde acoustique :

$$\frac{\delta^2 p}{\delta x^2} - \underbrace{\rho X_S}_{=\frac{1}{v^2}} . \frac{\delta^2 p}{\delta t^2} = 0$$




$\rho$ : masse volumique du milieu
$X_S$ : compressibilité du milieu

$$\frac{1}{v^2} = \rho X_S \rightarrow v_{acou} = \sqrt{\frac{1}{\rho X_S}} \quad (en\ m.s^{-1})$$

$$\frac{1}{v^2} = \frac{\mu}{T} \rightarrow v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

T : tension (en Newton)
$\mu$ : masse linéaire de la corde (kg/m)

- Onde électromagnétique : formation du couple champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ dans le temps et l'espace.
- Onde non matérielle : pas besoin de matière pour se propager : elle se propage bien dans le vide et avec une célérité maximale de $3.10^8\ m.s^{-1}$
- Onde transversale : déformation perpendiculaire à l'axe de propagation (similaire aux vagues à la surface de l'eau)

- Equation de propagation d'une onde électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$
  Propagation selon $(\overrightarrow{Ox})$ :

  Pour $\vec{E}$ : $\frac{\delta^2 \vec{E}}{\delta x^2} - \mu_0 \varepsilon_0 . \frac{\delta^2 \vec{E}}{\delta t^2} = \vec{0}$

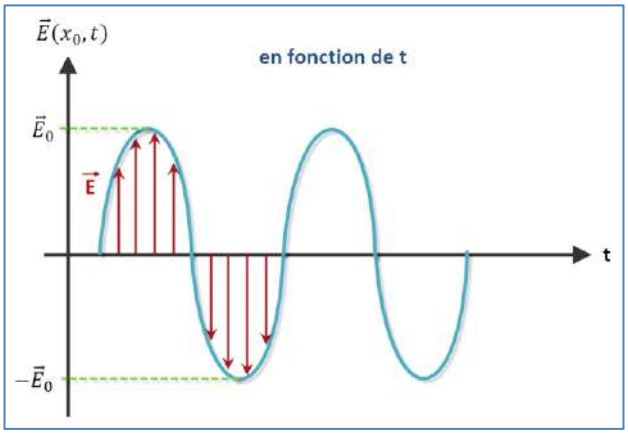
  Pour $\vec{B}$ : $\frac{\delta^2 \vec{B}}{\delta x^2} \mu_0 \varepsilon_0 . \frac{\delta^2 \vec{B}}{\delta t^2} = \vec{0}$

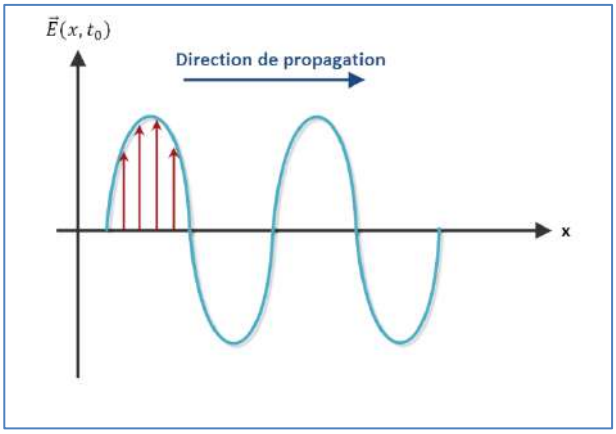
  $\mu_0$ : perméabilité magnétique du vide = $4\pi 10^{-7}\ SI$

  $$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9} = \frac{10^{-9}}{36\pi}\ SI \ \rightarrow \ c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3.10^8\ m.s^{-1}$$

  $$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9 = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$$

**Représentation d'une propagation de $\vec{E}$ ou de $\vec{B}$ :**




(vibration entre $\overrightarrow{E_0}$ et $-\overrightarrow{E_0}$)

$E_0$ : valeur maximale = amplitude de $\vec{E}$.

# II/ Equations de Maxwell et interprétation

**Maxwell a résumé toutes les interactions électromagnétiques en 4 équations locales, c'est-à-dire, valables en tout point, à tout instant et pour tout milieu.**

**Intérêts :**

- On ne fait apparaître que des opérateurs dérivées partielles (div et $\overrightarrow{rot}$), plus faciles que les intégrales.
- Elles ont permis de mettre en évidence <u>l'existence des ondes électromagnétiques</u>, et leur vitesse de propagation.

**1) $div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$ théorème de Gauss-Maxwell :**

expression locale du théorème de Gauss : Th de Gauss transformé à l'aide du th de Oskrogradski

$$\oiint_S \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

**2) $div\,\vec{B} = 0$ les lignes de $\vec{B}$ ne divergent jamais, sont toujours fermées : $\vec{B}$ est à flux conservatif**

Le flux magnétique dans une surface fermée est toujours égal à 0.

Equation locale de la propriété fondamentale de $\vec{B}$ :

$$\oiint_S \vec{B}\,\overrightarrow{dS} = 0 \text{ (th de Oskro)}$$

**3) $\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\delta\vec{B}}{\delta t}$ théorème de Faraday-Maxwell :**

exprime l'auto-induction : Pas de courant, pas de charges, invariable.

Equation locale de la loi de Faraday en appliquant le théorème de Stokes :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \oint_{circuit} \vec{E}\,\overrightarrow{dl}$$

e = fem autoinduite (tension en V)

$i = \frac{e}{R}$ (loi d'Ohm) : courant induit

**4) $\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu(\vec{J} + \varepsilon\frac{\delta\vec{E}}{\delta t})$ $\vec{J}$ est la densité de courant : théorème d'Ampère-Maxwell**

En appliquant le théorème de Stokes

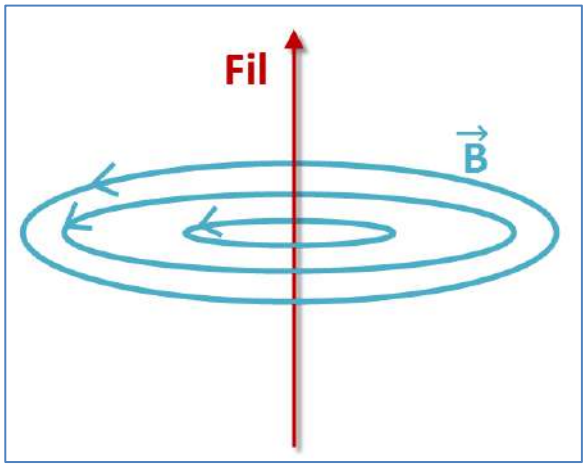
**Interprétation :**

**1) :** $\rho$ = densité de charge volumique (en C/m$^3$) et $\varepsilon$ = permittivité diélectrique du vide

Elle permet de remonter à la densité $\rho$ en tout point, connaissant $\vec{E}$ en ce même point.

**2) :** cette formule signifie que les lignes de $\vec{B}$ sont toujours fermées (pas de divergence)

*Ex 1 :*




*Ex 2 : Tore magnétique*

*** schéma tore *** (papier)
Ligne circulaires confinées uniquement à l'intérieur du tore et fermées.
Cela se traduit par le fait que la divergence est toujours égale à 0.

Le flux magnétique est conservé, c'est-à-dire entre 2 points A et B des lignes de champ, B peut changer de direction et d'intensité mais :

$$\Phi_{\mathrm{A}}(\vec{B}) = \Phi_{\mathrm{B}}(\vec{B})$$

**3)** : Elle exprime le phénomène d'autoinduction :
Si $\vec{B}$ varie en fonction du temps, alors il se crée un champ $\vec{E}$ (tel que $\boldsymbol{\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\delta\vec{B}}{\delta t}}$)
Ce champ $\vec{E}$ est responsable de la création du couple $(e, i) \equiv$ tension et courant autoinduits.

**4)** : $\vec{J} + \varepsilon\frac{\delta\vec{E}}{\delta t}$ est la densité de courant total (en Ampère/m²)
$\vec{J}$ = densité de courants stationnaires (en A/m²)
$\varepsilon\frac{\delta\vec{E}}{\delta t}$ = densité de courants de déplacement (en A/m²)
Cette équation signifie que la somme des courants stationnaires et de déplacement crée un champ $\vec{B}$ tel que $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu(\vec{J}_{total})$

# Chapitre 2 : Propagation d'onde électromagnétique dans le vide (ou dans l'air)

## I/ Equations de Maxwell dans le vide

Dans le milieu vide :
- pas de charges => $\rho = 0$ (densité de charge volumique)
- pas de courants => $\vec{J} = \vec{0}$
- $\mu = \mu_0$
- $\varepsilon = \varepsilon_0$

➔ **Conséquences :**
- $div\vec{E} = 0$
- $div\vec{B} = 0$
- $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\delta\vec{B}}{\delta t}$
- $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\delta\vec{E}}{\delta t}$

## II/ Equations de D'Alembert et solutions

### 1) Equations de D'Alembert

Ce sont les équations de propagation des vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans le vide.
[Comment retrouver ces équations : tai ou oral]

Equation de propagation = relation entre la variation spatiale mathématiquement donnée par le Laplacien de f ($\Delta f$) et la variation temporelle ($\frac{\delta^2 f}{\delta t^2}$)

**Equation de propagation type pour une fonction f quelconque :**

$$\boxed{\Delta f - K\frac{\delta^2 f}{\delta t^2} = 0}$$

**NB :**
Se simplifiera en pratique en fonction des calculs à effectuer.

A l'aide de l'identité $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{V}) = \overrightarrow{grad}(div\vec{V}) - \Delta\vec{V}$, la combinaison les 4 équations de Maxwell dans le vide, permet d'établir les **équations de D'Alembert pour $\vec{E}$ et $\vec{B}$** :

$$\begin{cases} \Delta\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\delta^{2\vec{E}}}{\delta t^2} = \vec{0} \\ \Delta\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\delta^2\vec{B}}{\delta t^2} = \vec{0} \end{cases}$$

**NB :**

$\mu_0\varepsilon_0$ est homogène à des (m/s)² : $\mu_0\varepsilon_0 \equiv \frac{\Delta E}{\frac{\delta^2 E}{\delta t^2}}$

avec $\Delta \equiv \frac{\delta^2}{\delta x^2}$ en $m^{-2}$ et $\frac{\delta^2}{\delta t^2}$ en $s^{-2}$

Par analogie avec les ondes matérielles (ondes acoustiques) où la grandeur est la pression :

$$\Delta_p - \frac{1}{v^2} * \frac{\delta^2 p}{\delta t^2} = 0$$

Avec : p = pression et v = vitesse sonore

$$=> \mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

où « c » est la célérité de l'OEM dans le vide.

$$=> c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = 3.10^8\ m/s$$

## 2) Solution des équations de D'Alembert

La solution générale de * pour des variations à une dimension (= une variable) :

Pour f quelconque à une dimension :

=> $f(x,t)$ => $\Delta f = \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} + \cancel{\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}} + \cancel{\frac{\delta^2 f}{\delta z^2}}$

=> $\boxed{\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\delta^2 f}{\delta t^2} = 0}$ avec $f = E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$

De solution $f(x,t) = F(x - ct) + G(x + ct)$

$F(x - ct)$ = signal qui se propage vers les $x > 0$ avec $\vec{v} = c$ ➔ Onde progressive

$G(x + ct)$ = signal qui se propage vers les $x < 0$ avec $\vec{v} = -c$ ➔ Onde régressive

➔ Conclusion :

- Une Onde électromagnétique <u>progressive</u> se propageant dans la direction $\overrightarrow{Ox}$ est de la forme :

$$\vec{E}(x - ct)$$
$$\vec{B}(x - ct)$$

- Une Onde électromagnétique <u>régressive</u> se propageant dans la direction $\overrightarrow{Ox}$ est de la forme :

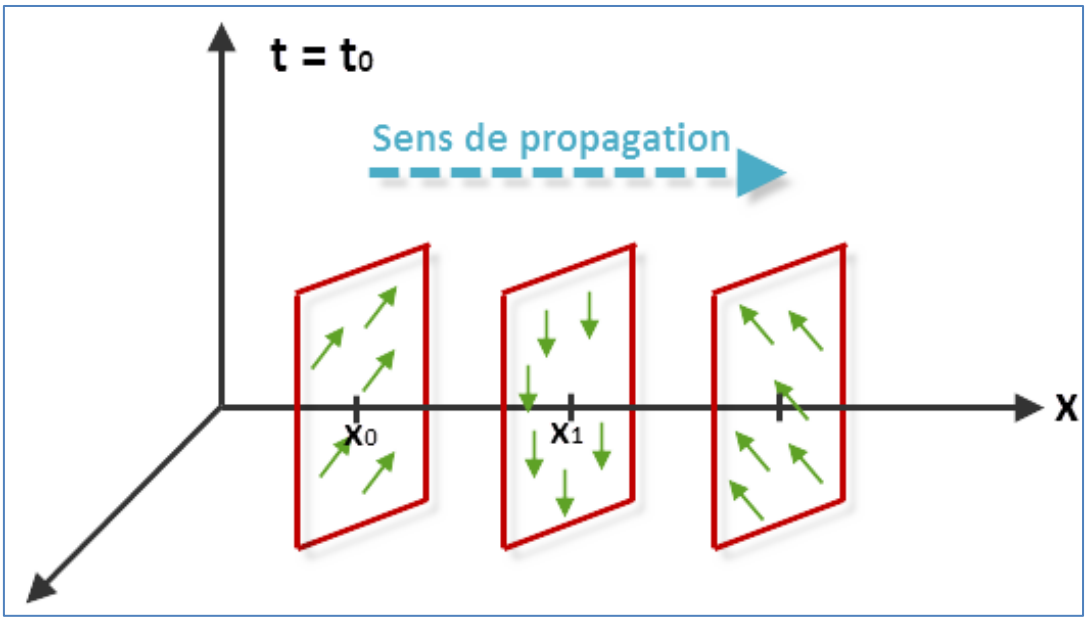
$$\vec{E}(x + ct)$$
$$\vec{B}(x + ct)$$

# III/ Ondes planes (rappel : dans le vide ou l'air)

## 1) Définition

**Onde plane :**
Onde dont la surface d'onde est un plan.

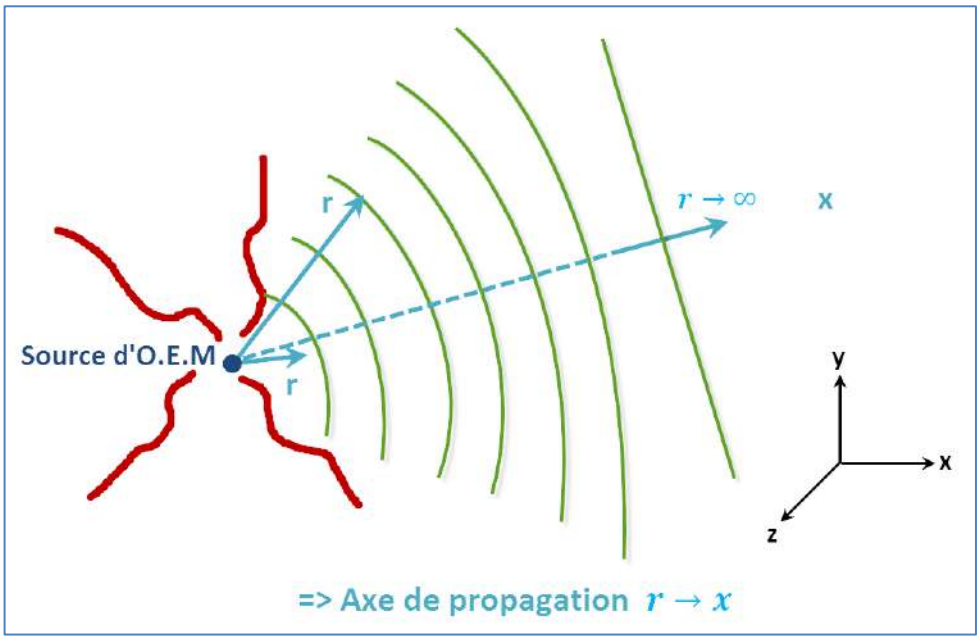
**Surface d'onde :**
Ensemble des points où le champ $\vec{E}$ ou $\vec{B}$ a même direction, même sens et même intensité = même état vibratoire.




Les surfaces d'onde ≡ plan.

**NB :**
Au niveau de la source d'onde électromagnétique les ondes sont plutôt sphériques (la surface d'onde est une sphère).
En revanche, si on se situe très loin de la source (rayon de la sphère tend vers l'infini), la surface d'onde devient plane : on a donc des ondes planes.
Mathématiquement, les ondes planes sont plus faciles à manipuler
→ Il faut faire l'étude très loin de la source.

Cf : schéma page suivante




## 2) Propriétés d'ondes planes

Ces propriétés ont été établies à partir des équations de Maxwell exprimées dans le milieu vide.

1. $div\vec{E} = 0$ 2. $div\vec{B} = 0$

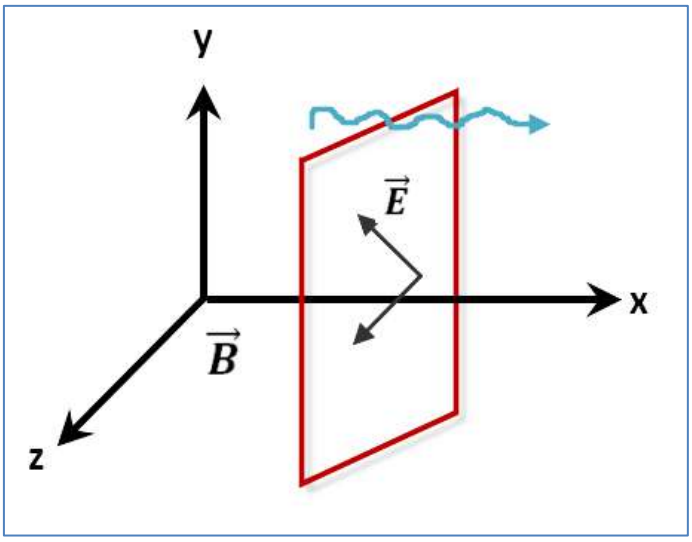
3. $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\delta\vec{B}}{\delta t}$ 4. $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\delta\vec{E}}{\delta t}$

Avec la solution de l'équation de D'Alembert :

$\vec{E}(x,t) = \vec{E}(x - ct)$ : onde progressive vers les x > 0 avec $\bar{v} = +c$

**<u>Les 4 propriétés sont :</u>**

- $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont transverses ($\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires à l'axe de propagation)
- $\|\vec{E}\| = c\|\vec{B}\|$ ($c = 3.10^8 m.s^{-1}$)
- $\vec{E}$ perpendiculaire à $\vec{B}$
- $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{u})$ trièdre direct ($\vec{u}$ vecteur unitaire de l'axe de propagation)



# IV/ Ondes planes progressives sinusoïdales (OPPS)

**<u>Expression générale d'une OPP se propageant sur $\overrightarrow{Ox}$ :</u>**

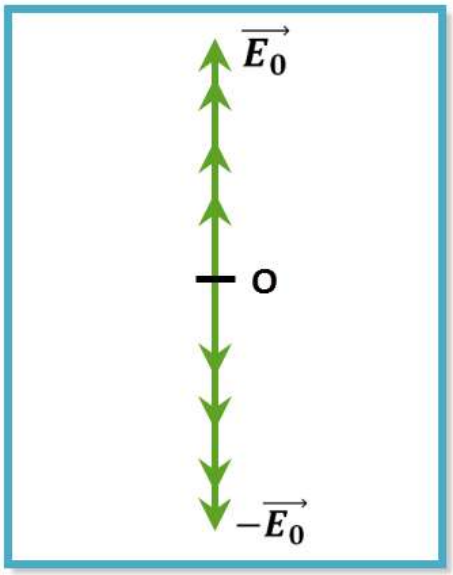
$$\vec{E}(x,t) = \underbrace{\vec{E}(x-ct)}_{X(x,t)}$$

$\cancel{\vec{E}(x,t) = f(x)g(t)}$ Pas de propagation

Alors $\vec{E}(x-ct) = \underbrace{\overrightarrow{E_0}}_{\substack{\text{Amplitude de } \vec{E} \\ = \text{ valeur max de } E_0}} \cos\big(k(x-ct)\big)$

On doit multiplier par k (rad/m) car la phase $k(x-ct)$ est en rad et $x-ct$ en m → k en $rad.m^{-1}$

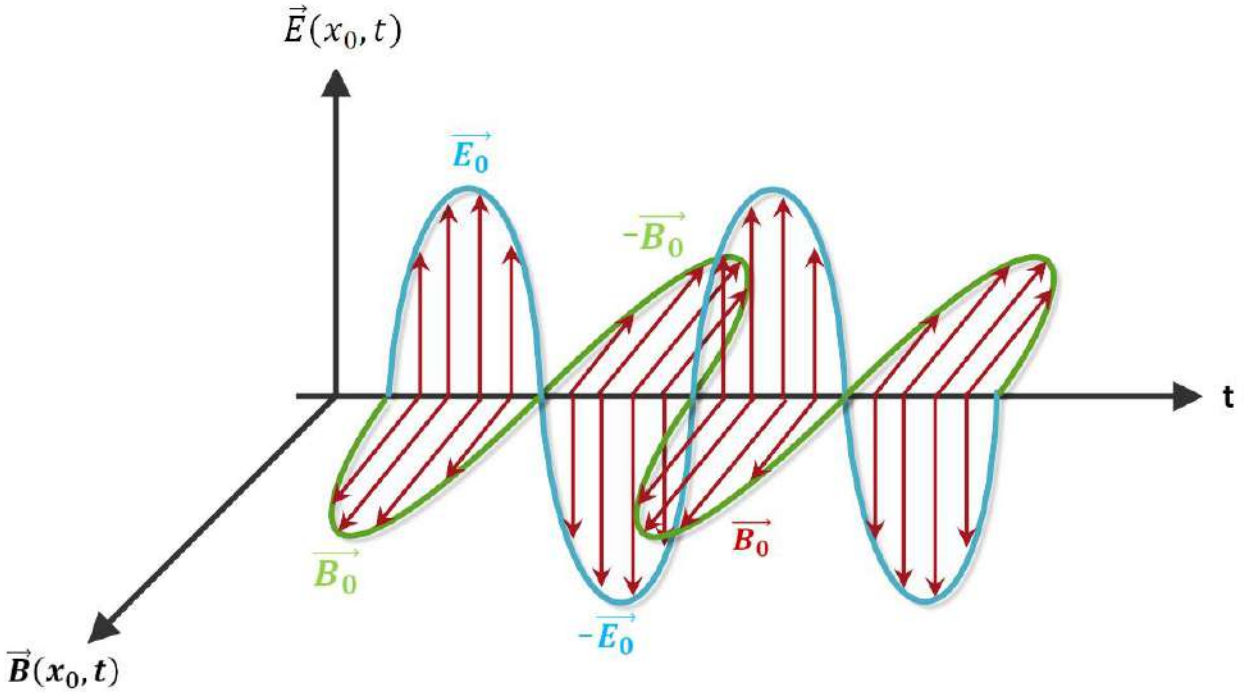
- **Dans le plan d'onde (surface d'onde)**




Plan d'onde

On observe une vibration du champ $\vec{E}$ entre $+\overrightarrow{E_0}$ et $-\overrightarrow{E_0}$ pendant $\Delta t = T$ : période.

- **En fonction du temps (on fixe x donc une position de l'espace : $x = x_0$)**




Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont transverses, donc quand l'un est au max, l'autre aussi…

$\vec{E}(x,t) = \vec{E_0}\cos(kx - kct) = \vec{E_0}\cos(kx - \omega t)$ ➔ $\boxed{kc = \omega}$

Nb d'onde vitesse de propagation pulsation

# 1) Grandeurs caractéristiques d'une OPPS

## a) Période T et fréquence f

T : période temporelle (en s) = intervalle de temps
$f = \frac{1}{T}$ (en $s^{-1}$ ou $Hz$)

## b) Pulsation $\omega$

C'est la vitesse angulaire de rotation de $\vec{E}$
$\alpha = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$ : quand $\Delta\alpha = 2\pi$ => $\Delta t = T$

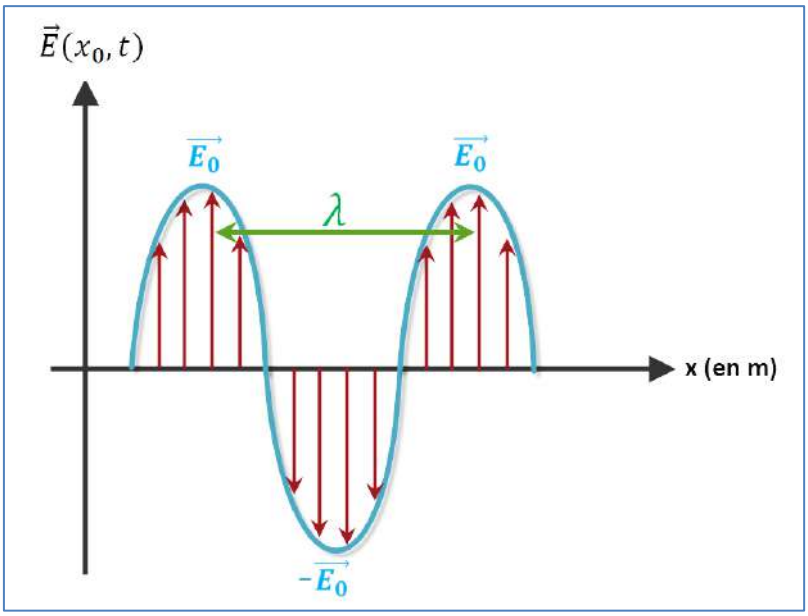
=> $\boxed{\omega = \alpha = \frac{2\pi}{T}\ (rad.s^{-1})}$

## c) Longueur d'onde $\lambda$ (en m)

C'est une période spatiale = distance parcourue par l'onde électromagnétique pendant T à la vitesse c

$$\boxed{c = \frac{\lambda}{T} \rightarrow \lambda = cT = \frac{c}{f}}$$

Elle vérifie $\vec{E}(x+\lambda, t_0) = \vec{E}(x, t_0)$ à $t = t_0$.



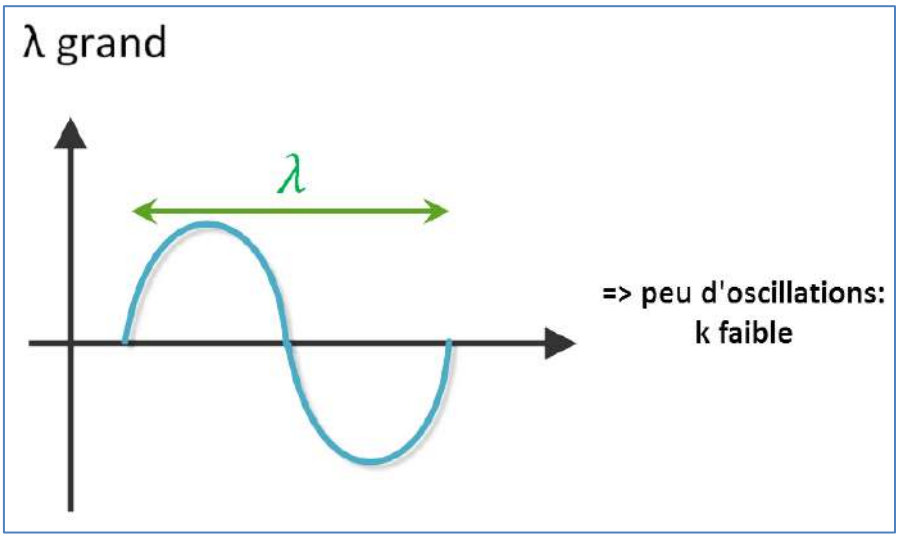

## d) Nombre d'onde k

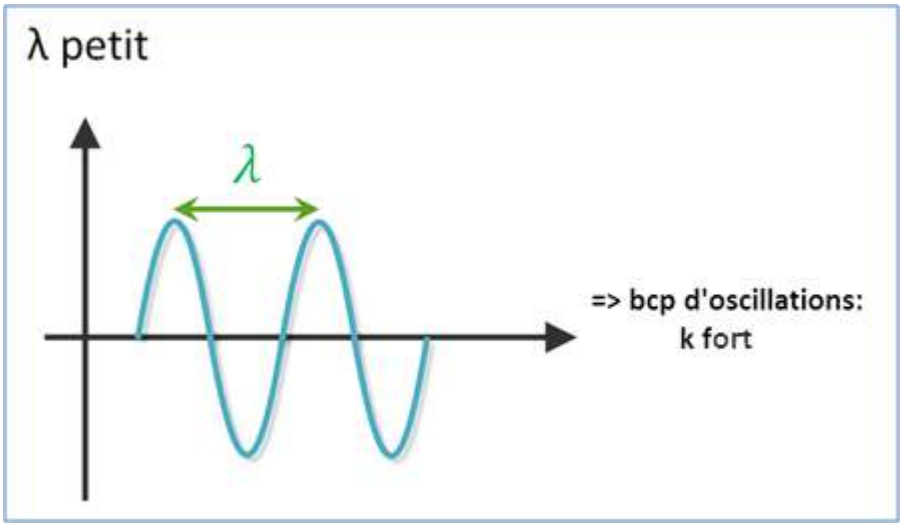
$\vec{E}(x - ct) = \vec{E_0}\cos(kx - kct) = \vec{E_0}(kx - \omega t)$ => $\omega = kc$

Or $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ et $c = \frac{\lambda}{T}$

=> $\frac{2\pi}{T} = k.\frac{\lambda}{T}$

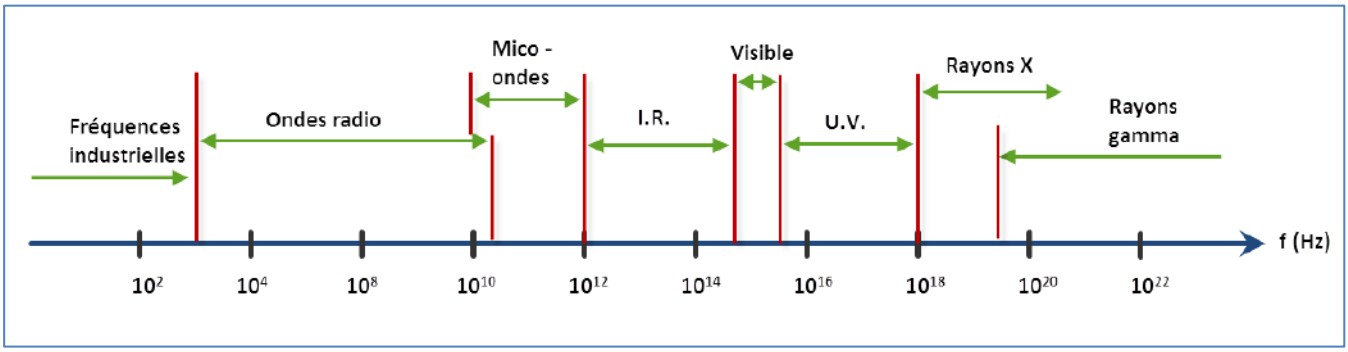
=> $\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}\ (rad.m^{-1})}$




➔ D'où le nom : k = nombre d'onde.

**Fréquences des Ondes Electromagnétiques**




$$\lambda = \frac{c}{f}$$

## 2) Généralisation

**But :** Trouver l'expression de $\vec{E}$ (ou de $\vec{B}$) qui se propage dans une direction quelconque

$\vec{k}\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$

Mais $\|\vec{k}\| = \sqrt{{k_x}^2 + {k_y}^2 + {k_z}^2} = \frac{2\pi}{\lambda}$

$\vec{E}(M,t) = \vec{E}(x,y,z,t) = \overrightarrow{E_0}\cos(\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t)$

Où $\alpha, \beta, \gamma$ sont les composantes du vecteur d'onde $\vec{k}$

On pose $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{k}\begin{pmatrix} k_x=\alpha \\ k_y=\beta \\ k_z=\gamma \end{pmatrix}$

➔ $$\boxed{\begin{gathered}\vec{E}(x,y,z,t) = \overrightarrow{E_0}\cos\left(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t\right) \\ \vec{E}(M,t) = \overrightarrow{E_0}\cos\left(\vec{k}.\overrightarrow{OM} - \omega t\right)\end{gathered}}$$

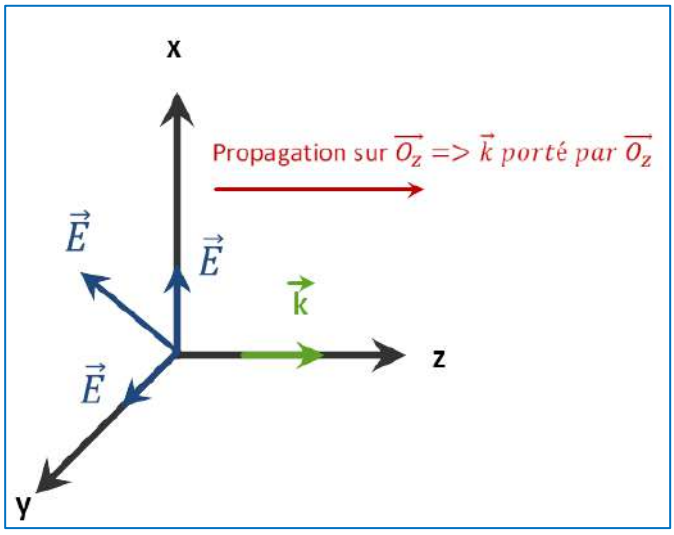
*Exemples :*

- OPPS qui se propage sur l'axe $\overrightarrow{Oz}$

→ $\vec{E}(z,t) = \overrightarrow{E_0}\cos(kz - \omega t)$ donc $\vec{k}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}_{\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}}$

**NB :**

Si $\vec{E}$ se propage selon $\overrightarrow{Oz}$ et comme $\vec{E}$ est transverse (perpendiculaire à l'axe), alors :
$\vec{E}$ est porté par $\overrightarrow{Ox}$
$\vec{E}$ est porté par $\overrightarrow{Oy}$
$\vec{E} \in$ plan (xOy)

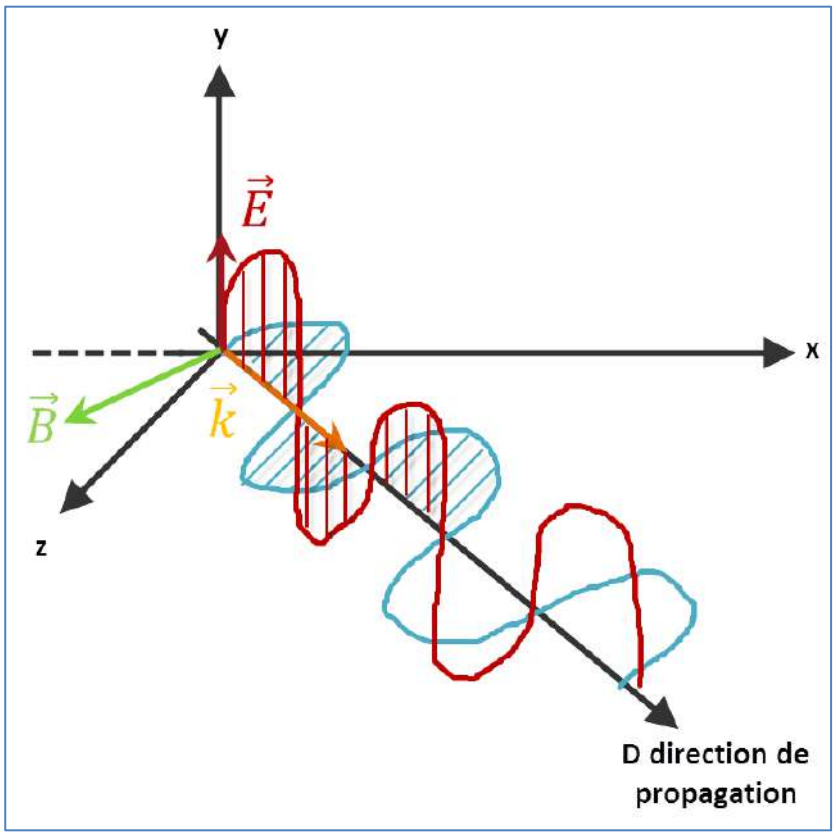



($\vec{E}$ est perpendiculaire à $\vec{k}$ car $\vec{E}$ est linéaire)

=> OPPS qui se propage dans un plan (xOz)

→ $\vec{k}\begin{pmatrix} k_x \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix}$ ➔ $\vec{E} = \overrightarrow{E_0}\cos(k_x x + k_z z - \omega t)$

cstes variables




**NB :**

On peut trouver $\vec{B}$ par $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$ trièdre direct (4e propriété d'onde plane dans le vide).

## 3) Notation complexe

→ Equations de Maxwell grandement simplifiées, linéarisées : plus de dérivées ni de primitives, grâce à la fonction exponentielle.

→ Comment s'écrit l'opérateur $\Lambda$ en complexe ?

$\vec{E}(M,t) = \overrightarrow{E_0}\cos(\vec{k}.\overrightarrow{OM} - \omega t)$

En complexe :

$\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\overrightarrow{E_0}}\, e^{i(\vec{k}.\overrightarrow{OM} - \omega t)}$

De même pour $\vec{B}$ :

$\underline{\vec{B}}(M,t) = \underline{\overrightarrow{B_0}}\, e^{i(\vec{k}.\overrightarrow{OM} - \omega t)}$

**Conséquences de la notation complexe :**

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{V} = i.\vec{k} \\ \frac{\delta}{\delta t} = -i\omega \end{array}}$$

**Ecriture des équations de Maxwell en notation complexe dans le vide :**

**1)** $div\,\vec{E} = 0$ $\quad div\,\vec{E} = \vec{V}.\vec{E} = i.\vec{k}.\vec{E} = 0$ => $\vec{k}.\vec{E} = 0$ ➔ $\vec{E}$ perpendiculaire à $\vec{k}$
➔ $\vec{E}$ transverse, $\vec{k}$ donne le sens et la direction de propagation.

**2)** $div\,\vec{B} = 0$ $\quad div\,\vec{B} = \vec{V}.\vec{B} = i.\vec{k}.\vec{B} = 0$ => $\vec{k}.\vec{B} = 0$ ➔ $\vec{B}$ perpendiculaire à $\vec{k}$
➔ $\vec{B}$ transverse

**3)** $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\delta\vec{B}}{\delta t}$ $\quad \overrightarrow{rot}\vec{E} = \vec{\Lambda} \wedge \vec{E} = -\frac{\delta\vec{B}}{\delta t}$ => $i.\vec{k} \wedge \vec{E} = -(-i\omega t)\vec{B}$ ➔ $\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega\vec{B}$

**4)** $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\delta\vec{E}}{\delta t}$ $\quad \overrightarrow{rot}\vec{B} = \vec{\Lambda} \wedge \vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\delta\vec{E}}{\delta t}$ => $i.\vec{k} \wedge \vec{B} = \frac{1}{c^2}(-i\omega t)\vec{E}$ ➔ $\vec{k} \wedge \vec{B} = -\frac{\omega}{c^2}\vec{E}$

# V/ Grandeurs énérgétiques pour les OEM

## 1) Bilan de puissance

La combinaison des équations de Maxwell dans un milieu matériel quelconque donne l'équation-bilan de la puissance :

$$\boxed{\frac{\delta W_{e,m}}{\delta t} = \oiint_{\Sigma} \vec{S}.\overrightarrow{d\sum} + \iiint_{\tau} \vec{J}.\vec{E}.d\tau}$$

$\frac{\delta W_{e,m}}{\delta t}$ = variation de l'énergie électromagnétique dans le temps (en J/s => en Watt)

- $\oiint \vec{S}.\overrightarrow{d\sum}$ = Puissance de rayonnement

  vecteur de Poynting en W/m² — élément de surface en m²

- $\iiint_{\tau} \vec{J}.\vec{E}.d\tau$ = Puissance dissipée par effet Joule : exprime l'interaction onde-matière
  $\vec{J}$ est la densité de courant produite par les charges du milieu.

**Conclusion :**

La puissance totale de l'OEM est la somme de la puissance de rayonnement et de la puissance dissipée par effet Joule.

## 2) Vecteur de Poynting

Par définition :

$$\boxed{\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu}}$$

(Valable quel que soit le type d'OEM et quel que soit le milieu de propagation)

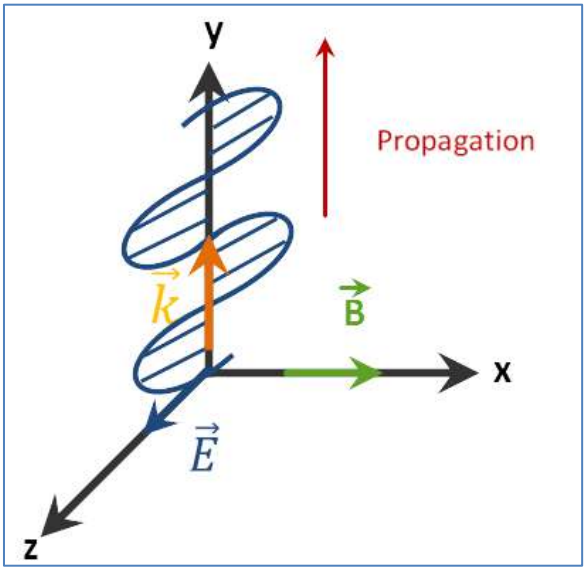
- Pour une OPPS (dans l'air ou dans le vide)
  $\mu = \mu_0$ (vide)
  OPP $\vec{E}$ perpendiculaire à $\vec{B}$ => $\vec{E} \wedge \vec{B} = EB * \vec{u}$
  (avec $\vec{u}$ = vecteur unitaire de l'axe de propagation)

$$\vec{S} = \frac{\mathrm{EB}}{\mu_0}\vec{u}$$

$\vec{S}$ est donc colinéaire à l'axe de propagation et donc colinéaire à $\vec{k}$
=> $\vec{S}$ et $\vec{k}$ sont colinéaires à l'axe de propagation.

*Ex :*
$\vec{E}$ de l'onde et d'expression $\vec{E}(y,t) = E_0 \cos(ky - \omega t)\overrightarrow{e_z}$

On déduit de cette écriture :
- $\vec{E}$ est <u>porté par</u> $\overrightarrow{Oz}$ car vecteur unitaire $\overrightarrow{e_z}$
- $\vec{E}$ <u>dépend de</u> y : une seule composante de $\vec{k}$, selon y => $\vec{k}\begin{pmatrix}0\\k\\0\end{pmatrix}$ ➔ propagation selon $\overrightarrow{Oy}$




=> $\vec{B}$ sera forcément <u>selon</u> $\overrightarrow{Oy}$

- Le vecteur de Poynting $\vec{S}$ est colinéaire à $\vec{k}$ (donc porté par $\overrightarrow{Oy}$)

**Expression de $\vec{B}$ :**

$\vec{B}$ est en phase avec $\vec{E}$

=>$\vec{B}(y,t) = B_0 \cos(ky - \omega t)\,\overrightarrow{e_x}$ même phase que $\vec{E}$

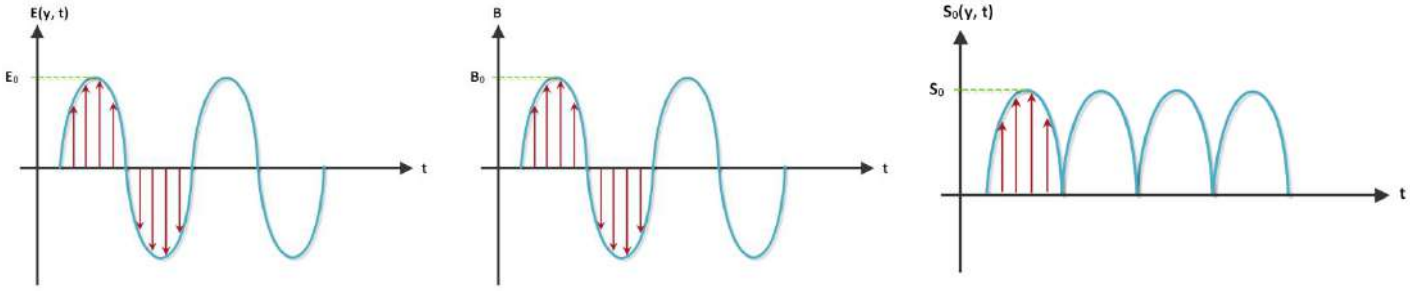
**Expression de $\vec{S}$, vecteur de puissance surfacique :**

$$\vec{S} = \frac{\vec{S}}{\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}} = \frac{1}{\mu_0}\begin{pmatrix}0\\0\\E\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}B\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\mu_0}\begin{pmatrix}O\\E.B\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{S} = \frac{E.B}{\mu_0}.\overrightarrow{e_y}$$

$$\vec{S}(y,t) = \frac{\left(E_0 \cos(ky - \omega t)\, B_0 \cos(ky - \omega t)\,\overrightarrow{e_y}\right)}{\mu_0}$$

$$\boxed{\vec{S}(y,t) = \frac{E_0 B_0}{\mu_0}\, cos^2(ky - \omega t)\overrightarrow{e_y}}$$




$\boxed{S_0 = \frac{E_0 B_0}{\mu_0}}$ en W/m²

$$S_0 = S_{max} = \frac{E_0 E_0}{\mu_0 c} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}$$

Or $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2} \rightarrow \frac{1}{\mu_0 c} = \varepsilon_0 c$

➔ $\boxed{S_0 = \varepsilon_0 c E_0^2}$

## 3) Intensité lumineuse d'une OEMPPS

I représente la valeur moyenne sur une période T du module du vecteur de Poynting $\vec{S}$ :

$$I = < S >_T = \frac{1}{T}\int_0^T S(M,t)dt$$

Pour une propagation de direction quelconque :
$\vec{S}(M,t) = \vec{S_0}\, cos^2(\vec{k}.\overrightarrow{OM} - \omega t)$

En module : $S(M,t) = S_0\, cos^2(\vec{k}.\overrightarrow{OM} - \omega t)$

$$I = < S >_T = < S_0\, cos^2(\vec{k}.\overrightarrow{OM} - \omega t) >_T = S_0 \underbrace{< cos^2(\vec{k}.\overrightarrow{OM} - \omega t) >_T}_{=\frac{1}{2}} = \frac{S_0}{2}$$

**Conclusion :**

$$I = \frac{S_0}{2}$$

$$I = \frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2}$$

L'intensité lumineuse d'une OEMPPS est proportionnelle au carré de l'amplitude du champ $\vec{E}$ : $E_0$

## Application

- ### 1) Onde radio

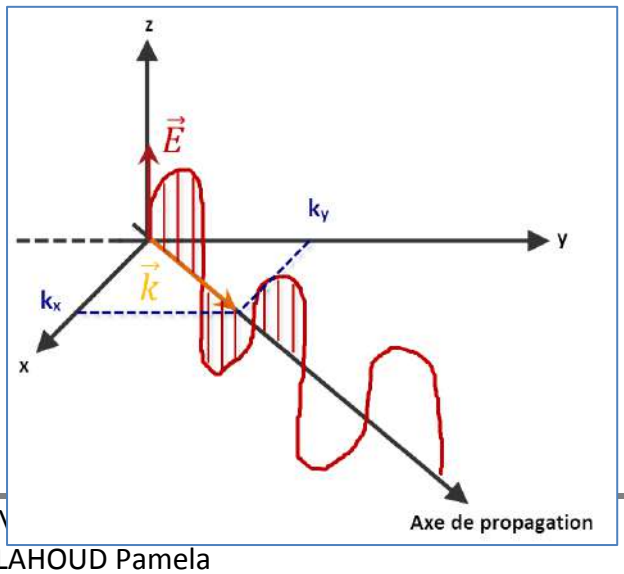
Une onde radio se propage dans l'air avec $c \approx 3.10^8\ m/s$.
Le champ $\vec{E}$ est : $\vec{E}(x,y,t) = 10^2 \cos(2\pi 10^{-2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right) - \omega t)\vec{e_z}$ (l'onde est supposée PPS)

1) Donner la direction de propagation
2) Donner les composantes du vecteur d'onde $\vec{k}$, calculer k, $\lambda$, f
3) Représenter $\vec{E}, \vec{B}$ et $\vec{k}$ dans le trièdre (xyz)
4) Exprimer les composantes de $\vec{B}$ (en utilisant une des équations de Maxwell en notation complexe) Calculer $B_0$.
5) Exprimer les composantes du vecteur $\vec{S}$. Calculer $S_0$.

**<u>Résolution :</u>**

1/ La propagation se fait dans le plan (xoy)
Car : > $\vec{E}$ dépend de x et de y

> La phase $(\cos(phase))$ montre que $\vec{k}$ a 2 composantes : $\vec{k}\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ 0 \end{pmatrix}$



2/ Composante de $\vec{k}$ (vecteur d'onde : donne le sens et la direction de propagation)

D'après $\vec{E}(x,y,t) = E_0 \cos(k_x x + k_y y - \omega t)\,\vec{e_z}$

Par identification, on a :

$E_0 = 10^2\ V/m$ et $\vec{k}\begin{pmatrix} 2\pi 10^{-2}\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2\pi 10^{-2}\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

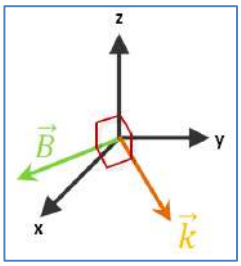
En module :

$$k = \sqrt{{k_x}^2 + {k_y}^2} = \pi 10^{-2}\sqrt{3+1} = 2\pi 10^{-2}\ rad/m$$

Calcul de $\lambda$ = longueur d'onde :
On a $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ => $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2\pi 10^{-2}} = 100\ m$

Calcul de la fréquence f de cette onde radio :
On a $c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$.
$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3.10^8}{100} = 310^6\ Hz = 3\ MHz$

3/ $\vec{B}$ ?
On applique la 4e propriété d'OPPS.
$(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$ est un trièdre direct.




Sans calculs

4/ Calcul des composantes de $\vec{B}$ :
On utilise la 3e équation de Maxwell :
$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\delta \vec{B}}{\delta t}$
$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\delta \vec{B}}{\delta t}$
$\left(\vec{\nabla} = i\vec{k},\ \frac{\delta}{\delta t} = -i\omega\right)$ => $\vec{k} \wedge$

$$=> \vec{B} = \frac{1}{\omega}\left(\vec{k} \wedge \vec{E}\right) = \frac{1}{\omega}\underbrace{\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Déterminées par identification}} \wedge \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix}}_{\text{Car } \vec{E} \text{ porté par } \vec{e_z} \text{ (par hypothèse)}} = \frac{1}{\omega}\begin{pmatrix} k_y.E - 0 \\ 0 - k_x.E \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega}\begin{pmatrix} k_y.E \\ -k_x.E \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$=> \vec{B} = \begin{cases} B_x = k_y * E = \frac{\Pi * 10^{-2}}{\omega} * 10^2 \cos\left(2\Pi * 10^{-2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{y}{2}\right) - \omega t\right) \\ B_y = -k_x * E = -\frac{\Pi * 10^{-2}}{\omega} * 10^{-2} * \sqrt{3} * 10^2 \cos\left(2\Pi * 10^{-2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{y}{2}\right) - \omega t\right) \\ B_z = 0 \end{cases}$$

Calcul de $B_0$ :

On utilise la 3e propriété d'onde plane :
$E = cB$(onde plane)
$E_0 = cB_0$ (onde plane sinusoïdale)

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{10^2}{3.10^8} = 0{,}33.10^{-6}\ Tesla$$

5/ Composantes de $\vec{S}$, vecteur densité surfacique de puissance (w/m²)

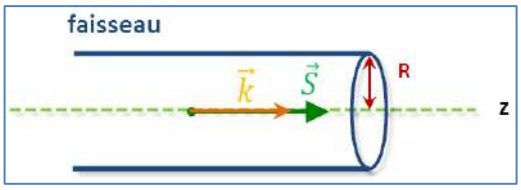
Par définition :

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x < 0 \\ B_y > 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu_0}\begin{pmatrix} -EB_y < 0 \\ EB_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S_0 = \frac{E_0 B_0}{\mu_0} = 10^2.\frac{0{,}33.10^{-6}}{4\pi 10^{-7}}\ W/m^2$$

- ## 2) Onde lumineuse (onde de faisceau laser)

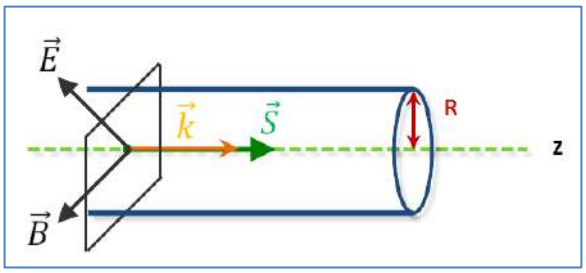
On considère un faisceau laser d'axe $\overrightarrow{Oz}$, de rayon R, composé d'OEMPPS.
Le champ $\vec{E}$ est d'amplitude $E_0 = 2.10^7\ V/m$




1) Représenter le faisceau avec les grandeurs $\vec{k}$ et $\vec{S}$
2) Exprimer la puissance moyenne de rayonnement du faisceau (en fonction de $\mu_0, c, R$ et $E_0$)
3) Quel doit être le rayon R du faisceau pour avoir $P_{moy} = 1\ MWatt = 10^6 W$ ?
4) Calculer la fréquence du faisceau sachant que $\lambda = 0{,}3\ \mu m$

**<u>Résolution :</u>**

1/ OPPS → $\vec{k}$ et $\vec{S}$ sont colinéaires à l'axe de propagation.




2/ Par définition :

$$P_{moy} = \Phi(\vec{S}) = \iint_{\Sigma} \vec{S}.\overrightarrow{d\Sigma} = \iint S.d\Sigma = S\iint d\Sigma = S.\Sigma = S.\pi R^2$$

Or $\vec{S} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$, et $\vec{E}$ perpendiculaire à $\vec{B}$ car onde plane.

$$\rightarrow \ \|\vec{S}\| = \frac{E.B\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\mu_0} = \frac{E.E}{\mu_0 c} \quad or\ E = cB$$

Or $E = E_0\cos(kz - \omega t)$ car le faisceau se propage selon $\overrightarrow{Oz}$.

$$P = \frac{1}{\mu_0 c}E^2 = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\ cos^2(kz - \omega t)\pi R^2$$

$$P_{moy} = \frac{\pi R^2 E_0^2}{\mu_0 c} < cos^2(kz - \omega t) >_T = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\mu_0 c}\ \pi R^2$$

$$\frac{1}{2}$$

3/ R ? pour $P_{moy} = 10^6 W$

$$P_{moy} = \frac{\pi R^2}{2\mu_0 c}E_0^2 => R = \frac{1}{E_0}\sqrt{\frac{2P_{moy}\mu_0 c}{\pi}} = \frac{1}{2.10^7} * \sqrt{\frac{2.10^6 * 4\pi 10^7 * 3.10^8}{\pi}}$$

$$= \frac{1}{10^7}\sqrt{6}.\sqrt{10^7} = 10^{-4}.\sqrt{60} = 7{,}7.10^{-4} = 0{,}77\ mm$$

4/ $f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3.10^8}{0{,}3.10^{-6}} = \frac{3}{3}.10^8.10^7 = 10^{15}\ Hz$

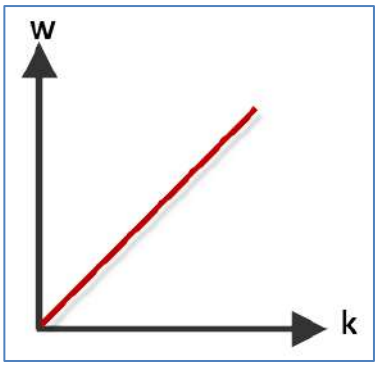
# Chapitre 3 : Propagation d'OEM dans un milieu matériel

## Introduction

- Vide : milieu non dispersif : toutes les fréquences se propagent à la même vitesse max $= c = 3.10^8\ m/s$
- Matériel : milieu dispersif : toutes les fréquences ne se propagent pas à la même vitesse, en effet : $v = f(\omega)\quad(\omega = 2\pi f)$

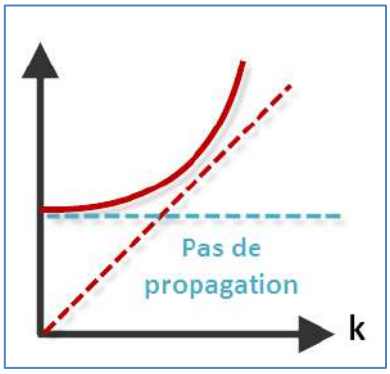
**Milieu non dispersif :**

$\omega = kc$ (relation linéaire entre $\omega$ et k)




**Milieu dispersif :**

$\omega$ n'est pas linéaire avec k

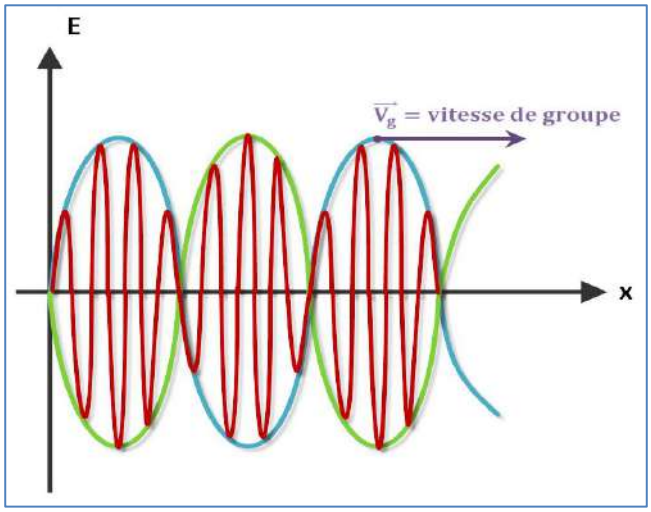



On définit dans le milieu matériel 2 vitesses :

- vitesse de phase $V_\varphi = \frac{\omega}{k}, \omega = pulsation\ et\ k = nb\ d'onde$

($V_\varphi$ n'a pas de signification physique elle peut même être supérieure à $c = 3.10^8 m/s$

- vitesse de groupe $V_g = \frac{d\omega}{dk}$ = dérivée de la fonction $\omega = f(k)$ = vraie vitesse de l'OEM = représente la vitesse de l'énergie de l'onde, et qui doit être inférieure ou égale à c.




# II/ Equation de dispersion

Elle renseigne sur comment l'onde va être dispersée dans le milieu.

Elle est obtenue à partir de la combinaison des 4 équations de Maxwell (écrites dans le milieu matériel <u>neutre</u> et en notation <u>complexe</u>) :

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + \frac{ij}{\varepsilon_0 \omega}\right)} \bigstar$$

¤ Donne le comportement de l'OEM dans le milieu
¤ Permet aussi le calcul de $V_\varphi = \frac{\omega}{k}$ = vitesse de phase et de $V_g = \frac{d\omega}{dk}$ = vitesse de groupe

Mais il faut conaître la conductivité $\gamma$ du milieu.

**NB :**
$\gamma$= conductivité des électrons obtenue à partir de :
$\vec{J} = \gamma \vec{E}$ (loi d'Ohm microscopique) et $\vec{J} = nq\vec{v}$
où $\vec{v}$ = vitesse de dérive
q = charge de la particule
n = densité (nb de charges/$m^3$)

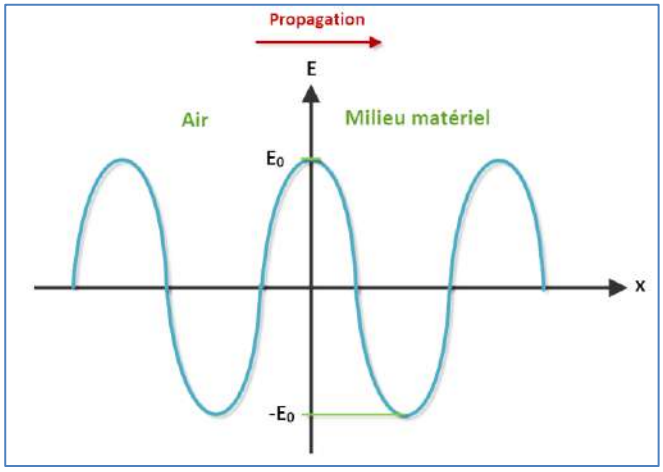
# III/ Comportement du champ $\vec{E}$

On a $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + \frac{ij}{\omega}\right)$. Il y a 3 types de comportements :
- $k^2 > 0 \Rightarrow k$ réel : <u>onde progressive</u>
- $k^2 < 0 \Rightarrow k$ imaginaire : <u>onde atténuée</u> ou <u>onde évanescente</u>
- $k^2$ complexe => k complexe : <u>onde amortie</u>

**1e cas : k² > 0 :**

(qui correspond à un domaine de fréquences donné)
→ k réel > 0.
On a $\vec{E} = \overrightarrow{E_0} e^{i(kx-\omega t)}$ (pour une propagation selon $\overrightarrow{Ox}$)
$\vec{E}_{x,t} = \mathcal{R}e\left(\vec{E}\right) \Rightarrow \vec{E}(x,t) = E_0 \cos(kx - \omega t)$

➔ L'onde est progressive :

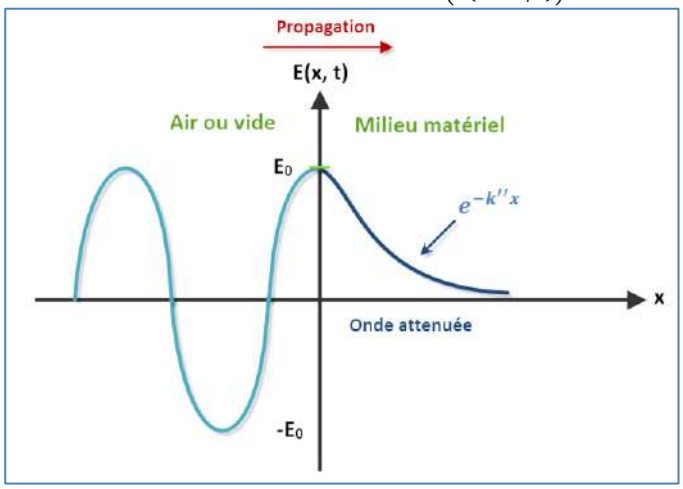



**2e cas : k² < 0 :**

→ k imaginaire pur => $k = ik''$
$\vec{E} = \overrightarrow{E_0}\, e^{i(kx-\omega t)} = \overrightarrow{E_0}\, e^{i((ik'')x-\omega t)} = \overrightarrow{E_0} e^{-k''x}\, e^{-i\omega t}$
$\vec{E}(x,t) = \mathcal{R}e\left(\vec{E}\right) = \overrightarrow{E_0} e^{-k''x} \cos(\omega t)$

↓ Terme d'atténuation

↓ absence du terme de propagation ($\cos\left(k(x - v_\varphi t)\right) \cos(kx - \omega t)$)



Il s'agit ici d'une onde atténuée (ou évanescente)

**3^e cas : k² complexe :**

$k = k' + ik"$

$\vec{E} = \overrightarrow{E_0}\, e^{i(k'+ik")x-\omega t} = \overrightarrow{E_0} e^{-k"x} e^{i(k'x-\omega t)}$

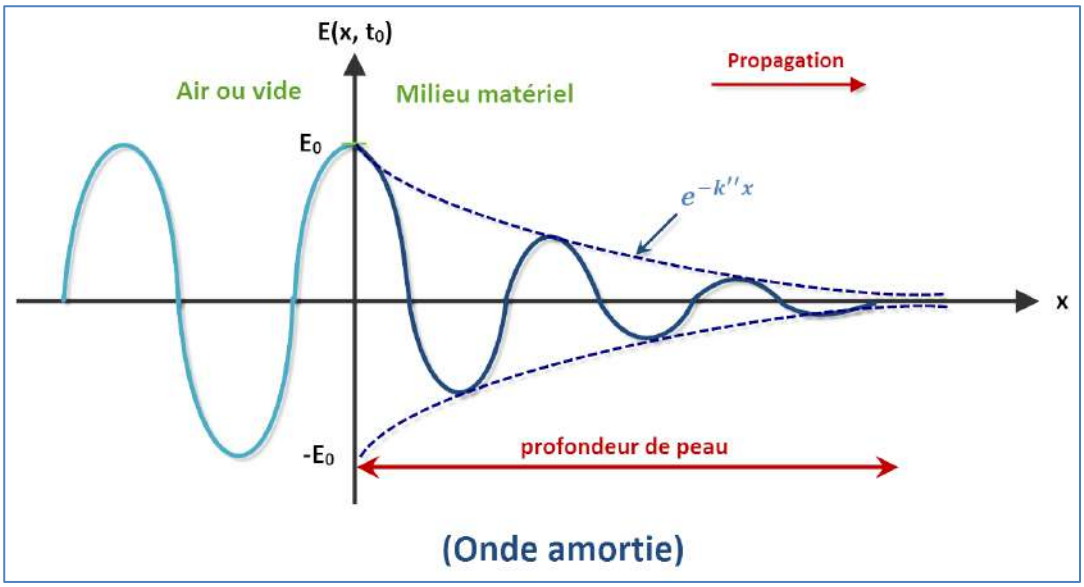
$\vec{E}(x,t) = \mathcal{R}e(\vec{E}) = \overrightarrow{E_0}\, e^{-k"x} \cos(k'x - \omega t)$

↓ ↓

Atténuation + Propagation

↓

Amortissement




**Conclusion :**

| **k²** | **> 0 ($k = k'$)** | **< 0 ($k = ik"$)** | **complexe ($k' + ik"$)** |
|---|---|---|---|
| **k** | réel > 0 | imaginaire pur | complexe |
| **type d'onde** | progressive | atténuée | Amortie |

## Application : Propagation d'une OEM dans l'ionosphère

On considère une onde radio de pulsation $\omega$ et de fréquence f, formée d'OPPS.
L'onde est envoyée dans l'ionosphère (milieu plasma = gaz ionisé caractérisé par une densité électronique $n_e$).

**1)** Montrer que l'équation de dispersion est de la forme $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = \frac{n_e.e^2}{m_e.\varepsilon_0}$

On donne $\gamma$= conductivité des électrons du plasma soumis à la force électrique $\overrightarrow{F_e} = q\vec{E}$

$$\gamma = \frac{in_e e^2}{m\omega} = \gamma(\omega)$$

**2)** Donner la fréquence de coupure, les bandes passantes, les types d'onde dans ce milieu (ionosphère).
On donne : $n_e = 10^{12} m^{-3},\ m_e = 9.10^{-31}\ kg,\ \varepsilon_0 = 9.10^{-12}\ SI\ \ et\ \ e = 1{,}6.10^{-19}\ C$

1) On a l'équation de dispersion pour un milieu plasma quelconque

★ $\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + \frac{ij}{\varepsilon_0 \omega}\right)}$

Pour le plasma $\gamma = \frac{in_e e^2}{m\omega}$ injectée dans ★ ➔ $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + \frac{i}{\omega\varepsilon_0}\left(\frac{in_e e^2}{m\omega}\right)\right)$

➔ $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{n_e e^2}{m\varepsilon_0 \omega^2}\right)$

$\omega_p = pulsation\ de\ phase$

$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)}$ équation de dispersion de phase.

2) Calcul de $f_c$ = fréquence de coupure.

On constate que k² = 0 pour $\omega = \omega_p \rightarrow f = f_p = \frac{\omega_p}{2\pi}$

$$f_c = f_p = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0}} = 10.10^6 Hz = 10\ MHz$$

On a $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$

➔ k² > 0 ssi $\omega > \omega_p \Rightarrow f > f_c = f_p \Rightarrow f = 10\ MHz$

=> Il y a propagation

k² < 0 ssi $\omega \leq \omega_p \Rightarrow f \leq 10\ MHz$

=> Atténuation

(Bande passante : f > 10 MHz)

**NB :**

Dans ce cas où $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$ (k² peut être complexe et donc pas d'amortissement)

**Conclusion :**

(Pour l'ionosphère à $10^{12}\ e^-/m^3$) :

f 0 10 MHz $+\infty$

| | | |
|---|---|---|
| k² | - | + |
| k | imaginaire | Réel |
| | atténuée | progressive |

**NB :**

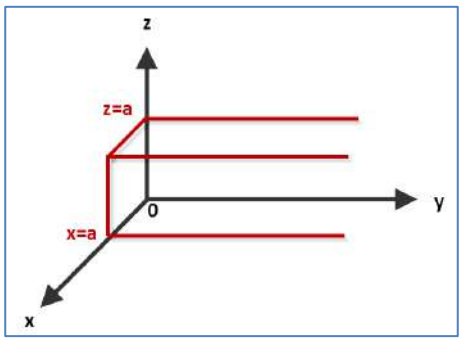
Pour f < 10 MHz, l'onde sera réfléchie.

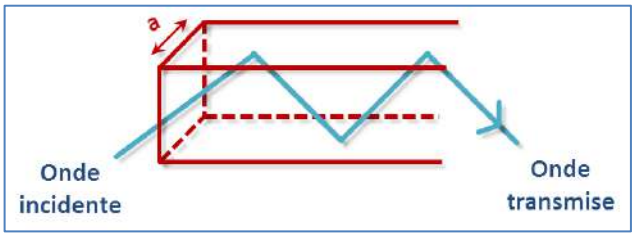
# Chapitre 4 : Guides d'ondes

Dispositifs qui permettent de transporter l'OEM et donc l'information véhiculée par cette onde.
Il y a 2 types :
- guides d'ondes métalliques
- fibres optiques

## Application :

Guide d'onde métallique de section carrée de dimension a, formé de plans infiniment conducteurs



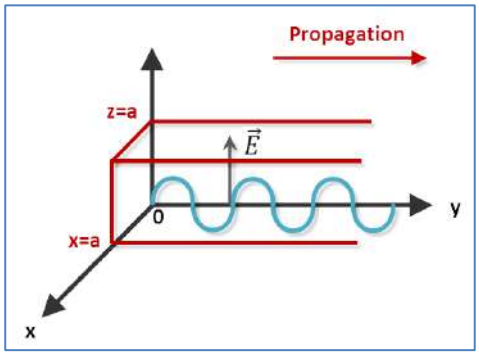

On donne a = 2 cm et le champ électrique $\vec{E}$ de la forme :

$$\vec{E}\begin{pmatrix} E_x=0 \\ E_y=0 \\ E_z=E_0\sin(k_1x)\cos(k_2y-\omega t) \end{pmatrix}$$ avec E, $k_1$, $k_2$ et $\omega$ constantes

Terme de propagation

**1)** Donner la direction de propagation, justifier votre réponse
**2)** Ecrire les équations de Maxwell dans le milieu guide en rappelant l'équation de D'Alembert
**3)** Retrouver une relation entre $k_1$, $k_2$ et $\omega$, sachant que $\vec{E}$ satisfait l'équation de D'Alembert.
**4)** Retrouver $\vec{B}$ (utiliser une des équations de Maxwell)
**5)** Utiliser les équations de continuité en x = 0 et en x = a, sachant que dans un métal $\vec{E}=\vec{0}$ pour montrer que les valeurs de $k_1$ sont quantifiées (= prennent des valeurs bien déterminées)
**6)** Utiliser la plus petite valeur de $k_1$ pour déterminer l'équation de dispersion.
**7)** Quelle est la fréquence critique, discuter les conditions de propagation dans ce guide d'onde.

1) Direction de propagation : l'axe $(\overrightarrow{Oy})$ car le terme de propagation = $\cos(k_2y-\omega t)$





MONJAUD Robin
LAHOUD Pamela
EFREI - L2 - Promo 2014
Mme TABBI

2) ¤ $div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon}$ $(vide : \rho = 0\ (pas\ d'échanges)$ => $div(\vec{E}) = 0$

¤ $div(\vec{B}) = 0$

¤ $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\delta\vec{B}}{\delta t}$

¤ $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu\cancel{\vec{J}} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\delta\vec{E}}{\delta t}$ or $\mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$

=> $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\delta\vec{E}}{\delta t}$

Equation de D'Alembert : $\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\delta^2\vec{E}}{\delta t^2} = \vec{0}$

(Equation de propagation dans le milieu du guide ≡ vide)

3) $\vec{E}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 sin\ k_1 \cos(k_2 y - \omega t) \end{pmatrix}$

$$\Delta\vec{E} = \begin{pmatrix} \cancel{\frac{\delta^2 E_x}{\delta x^2}} + \cancel{\frac{\delta^2 E_x}{\delta y^2}} + \cancel{\frac{\delta^2 E_x}{\delta z^2}} = 0\ car\ E_x = 0 \\ \cancel{\frac{\delta^2 E_y}{\delta x^2}} + \cancel{\frac{\delta^2 E_y}{\delta y^2}} + \cancel{\frac{\delta^2 E_y}{\delta z^2}} = 0\ car\ E_y = 0 \\ \frac{\delta^2 E_z}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 E_z}{\delta y^2} + \cancel{\frac{\delta^2 E_z}{\delta z^2}}\ car\ E_z = E_{z(x,y,t)} donc\ ne\ dépend\ pas\ de\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -k_1^2 E_z - k_2^2 E_z \end{pmatrix}$$

$$\Delta\vec{E} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -(k_1^2 + k_2^2)E_z \end{vmatrix} = -(k_1^2 + k_2^2)\vec{E}$$ **[1]**

$\frac{\delta^2\vec{E}}{\delta t^2} = \frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta\vec{E}}{\delta t}\right) = \frac{\delta}{\delta t}\left(+\omega\vec{E}\right) = +\omega\left(\frac{\delta^2\vec{E}}{\delta t}\right)$ or $\frac{\delta^2\vec{E}}{\delta t} = -\omega\vec{E}$

=> $\frac{\delta^2\vec{E}}{\delta t^2} = -\omega^2\vec{E}$ **[2]**

On injecte [1] et [2] dans l'équation de D'Alembert :

$$\left(-(k_1^2 + k_2^2) + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\vec{E} = \vec{0}$$

Or $\vec{E} \neq \vec{0}$

➔ $\boxed{k_1^2 + k_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2}}$ = relation entre $k_1 k_2 et\ \omega$ pour que $\vec{E}$ puisse se propager

4) Calcul de $\vec{B}$ par $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\delta\vec{B}}{\delta t}$

(E et B en fonction du temps varient en $\cos(ky - \omega t)$)

$\overrightarrow{rot}\vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\omega\vec{B}$

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta x} \\ \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix} = -\omega \vec{B}$$

=> $\left(\frac{\delta}{\delta z}\right) \wedge (E_z)$ => $\begin{pmatrix} \frac{\delta E_z}{\delta y} - 0 \\ 0 - \frac{\delta E_z}{\delta x} \\ 0 - 0 \end{pmatrix}$

**NB :**

$\vec{E}$ perpendiculaire à l'axe de propagation $(\overrightarrow{Oy})$
=> $\vec{E}$ est transverse mais $\vec{B}$ appartient au plan (xOy).
$\vec{B}$ n'est pas perpendiculaire à $(\overrightarrow{Oy})$
=> $\vec{B}$ non tranverse.

5) Relation de continuité :

$$E(x = 0) = E(x = a) = 0$$

E doit s'annuler lors du contact avec le métal = plans d'équations $x = a \quad et \quad x = 0$.
=> les deux plans verticaux du guide

$E(x = 0) = 0 \rightarrow (0 = 0\ !)$
$E(x = a) = 0 \rightarrow \sin(k, a) = 0 \Rightarrow k_1 a = n\pi \quad (\mathrm{n} \in \mathbb{Z}^*)$
$k_1 = \frac{\pi}{a}$ $(1\text{ère } valeur\ de\ k_1)$

$k_1 = \frac{n\pi}{a}$ $(n = 1,2,3, \ldots - 1, -2, -3 \ldots)$
=> $k_1$ est quantifié.

6) Equation de dispersion : condition que doit vérifier $k_2^2$ pour la propagation.
On a trouvé : $k_1^2 + k_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ or $k_1 = \frac{\pi}{a}$

➔ $\boxed{k_2^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$ Equation de propagation $\omega = f(k)$

7) Calcul de la fréquence critique f = fréquence pour laquelle k = 0.

Or $k_2^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \Rightarrow k_2 = 0\ ssi\ \frac{\omega_c}{c} = \frac{\pi}{a} \Rightarrow \omega_c = \frac{\pi c}{a} =$ pulsation critique.

**Conclusion :**

$k^2 > 0 \Rightarrow \omega > \omega_c, f > f_c$ => propagation
$k^2 < 0 \Rightarrow f \leq f_c, f \leq 7{,}5\ GHz$ => atténuation.