(1) Corrigé du D.E : Propagation électromagnétique.

Partie Cours :

1- L'équation de Maxwell $\vec{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ exprime le phénomène d'auto-induction, en effet lorsqu'un système est traversé par un champ magnétique variable au cours du temps, il engendre un champ $\vec{E}$ tel que $\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, ce champ fait déplacer les charges du système d'où création d'un courant induit. Mathématiquement cette équation l'équation locale de la loi de Faraday

2.a- Le vecteur $\vec{S}$ véhicule la densité surfacique de la puissance de rayonnement de l'onde. On l'appelle aussi le vecteur densité de courant d'énergie électromagnétique : $\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu}$.

b- Pour une onde qui se propage ds l'air ou dans le vide, si l'onde est une OPPS alors.

$\vec{E} \perp \vec{B}$ $\quad |\vec{E} \wedge \vec{B}| = E.B \sin \frac{\pi}{2}$.

$\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu} = \left| \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu} \right| . \vec{u}$ $\quad \vec{u}$ axe de propagation.

$\vec{S} = \frac{EB}{\mu_0} \vec{u}$ $\quad$ or $E = cB$ (onde plane).

$B = \frac{E}{C}$.

d'où : $\boxed{\vec{S} = \frac{E^2}{\mu_0 C} . \vec{u}}$ écriture plus simplifiée de $\vec{S}$ pour une O.P.P.S

3.a. bilan de puissance d'une O.E.M.

$$\underbrace{\frac{\partial W_{e,m}}{\partial t}}_{\text{Puissance totale}} = \underbrace{- \oiint_{\Sigma} \vec{S} \cdot d\vec{\Sigma}}_{\text{Puissance de ray}^t} \underbrace{- \iiint_{\tau} \vec{J} \cdot \vec{E} \, d\tau}_{\text{Puissance dissipée par effet Joule}}$$

b. Dans l'air ou dans le milieu vide, la puissance dissipée par effet Joule est nulle (pas de pertes). et donc la puissance totale se réduit à la puissance de rayonnement. ($\vec{J} = \vec{0}$ car pas de matière ds le vide d'où $\iiint_{\tau} \vec{J} \cdot \vec{E} \, d\tau = 0$

$$P_{totale} = \oiint \vec{S} \cdot d\vec{\Sigma}$$

$$= (P_{ui})_{ray^t}$$

4- les quatre propriétés d'ondes planes ds le vide.

- $\vec{E}$ et $\vec{B}$ transverses (chacun des vecteurs est $\perp$ à la direction de propagation).
- $\vec{E} \perp \vec{B}$
- $\|\vec{E}\| = c \|\vec{B}\|$.
- $(\vec{E}, \vec{B}, \text{axe de propagation})$ = forment un trièdre direct.

5- a. L'état de polarisation d'une O.E.M. décrit l'évolution de l'extrémité du vecteur champ électrique $\vec{E}$ lors de la propagation. ②

- Si l'extrémité de $\vec{E}$ décrit une droite : il s'agit d'une polarisation rectiligne (ou linéaire).
- " " " un cercle : " circulaire (gauche ↺ ou droite ↻)
- " " " une ellipse : " elliptique (droite ou gauche).

b- Intérêts d'une onde polarisée.

les intérêts sont nombreux, on peut citer.

- intérêt mathématique = équations de Champs faciles à manipuler.
- intérêt physique
  - on peut contrôler l'intensité de la lumière (réflexion, atténuation)
  - on peut avoir des interférences constructives (application : Holographie, lasers, --
  - en biologie : à l'aide de la phase de l'onde polarisée, on peut en déduire des caractéristiques de nombreuses molécules,

- - - -

Ex1.

1-a $\vec{k} \begin{pmatrix} 4\pi.10^7 \\ 3\pi.10^7 \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z}$

module de $\vec{k}$:

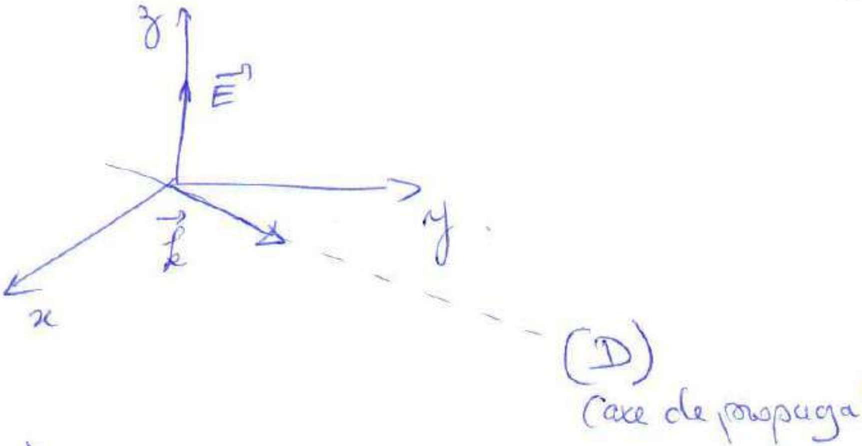
$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad \text{(Pythagore)}.$$

$$= \sqrt{(4\pi 10^7)^2 + (3\pi 10^7)^2} = \pi.10^7 \sqrt{16+9}$$

$$= \pi.10^7 \sqrt{25}.$$

d'où : $\underline{k = 5\pi 10^7 \text{ rd m}^{-1}}$

b. Le vecteur $\vec{k}$ a 2 composantes dans le plan (xoy) et c'est le vecteur $\vec{k}$ qui donne le sens et la direction de propagation, l'onde se propage donc suivant une droite (D) ds le plan (xoy)



c. Calcul de λ

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{5\pi 10^7} = \frac{2}{5} 10^{-7} = 0,4.10^{-7} \text{ m}.$$

Calcul de f :

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 10^8}{0,4.10^{-7}} = \frac{30}{4}.10^{16} = 7,5.10^{16} \text{ Hz}$$

2- 3ᵉ équation de Maxwell

(3)

$\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ avec : $\vec{rot}\,\vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E}$

$i\vec{k} \wedge \vec{E} = -(-i\omega\vec{B})$

$\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$

$\vec{\nabla} = i\vec{k}$

$\vec{B} = \frac{1}{\omega}\left(\vec{k} \wedge \vec{E}\right)$

$\vec{B} = \frac{1}{\omega}\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix}$ $\vec{E}$ est selon $\vec{Oz}$.

$\boxed{\vec{B} = \frac{1}{\omega}\cdot\begin{pmatrix} k_y \cdot E \\ -k_x \cdot E \\ 0 \end{pmatrix}}$ avec $\boxed{E = E_0\cos(k_x x + k_y y - \omega t)}$

Calcul de B_0 :

$E_0 = c B_0$ (propriété d'onde plane dans l'air).

$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{3.10^3}{3\,10^8} = 10^{-5}$ Tesla.

3- Composantes de $\vec{S}$:

$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{E} \wedge \vec{B}\right) = \frac{1}{\mu_0}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\begin{pmatrix} -E B_y \\ E B_x \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu_0}\begin{pmatrix} k_x E^2 \\ k_y \cdot E^2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z}$.

avec $k_x = 4\pi\, 10^7$ rd/m.

$k_y = 3\pi\, 10^7$ rd/m.

<u>Calcul de S_0</u>

$$S_0 = \frac{E_0 B_0}{\mu_0} = \frac{3\, 10^3 \cdot 10^{-5}}{4\pi\, 10^{-7}} \simeq \frac{1}{4} \cdot 10^5 \ W/m^2$$

$$\underline{S_0 \simeq 0{,}25 \cdot 10^5 \ W/m^2}$$

4- $P_{ui} = \iint_\Sigma \vec{S} \cdot d\vec{\Sigma} = \iint_\Sigma S \cdot d\Sigma \cos(0°)$.

$= S \iint d\Sigma = S \cdot \Sigma = S \cdot 4\pi d^2$.

$$P_{ui} = \underbrace{S_0}_{= \frac{E_0 B_0}{\mu_0}} \cdot \cos^2(k_x x + k_y y - \omega t) \cdot 4\pi d^2.$$

<u>Puissance moyenne</u>

$$P_{moy} = \underbrace{\langle S_0 \rangle}_{= S_0} \underbrace{\langle \cos^2(k_x x + k_y y - \omega t) \rangle}_{= \frac{1}{2}}$$

$P_{moy} = S_0 \cdot 2\pi d^2$.

$= 0{,}25 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot \pi \cdot (10^4)^2$.

$P_{moy} \simeq 15 \cdot 10^{12}$ Watts

Exercice 2 :

1- propagation sur $\vec{Oz}$ $\Rightarrow$ $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$.

polarisation rectiligne sur $\vec{Ox}$ $\Rightarrow$ $\vec{E} = E.\vec{e_x}$.

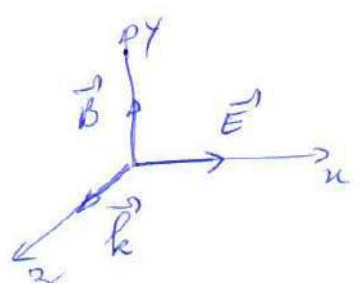
$$\boxed{\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(k.z - \omega t)\,\vec{e_x}}$$

$$\vec{E}(z,t) = 10^6 \cos(kz - \omega t).\vec{e_x}.$$

2. $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}6.10^{-6}} \simeq 10^7 \text{ rd m}^{-1}$. $(\pi \simeq 3)$.

3- $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$ trièdre direct.

$\vec{B}$ sera donc porté par $\vec{Oy}$ et il se propagera sur $\vec{Oz}$

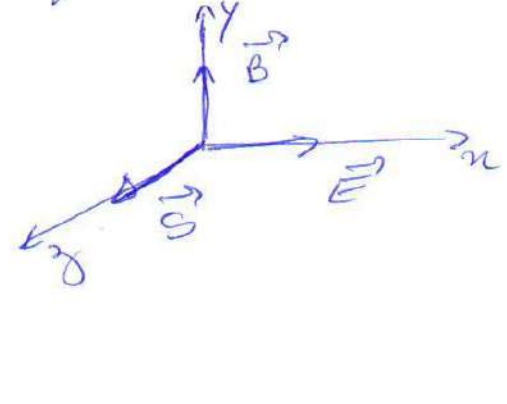


d'où : $\vec{B}(z,t) = B_0 \cos(kz - \omega t)\vec{e_y}$

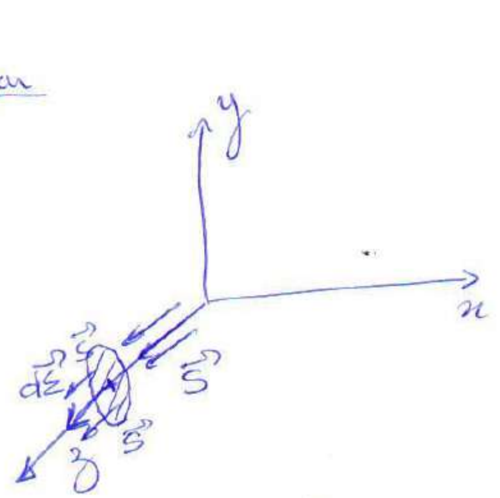
$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{10^6}{3\,10^8} = 0{,}33.10^{-2} \text{ Tesla}.$$

4-a. $\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0}\begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ B \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu_0}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E.B \end{pmatrix}$.

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\, E_0 B_0 \cos^2(kz - \omega t)\,\vec{e_z}$$



5- a <u>Puissance reçue par le recepteur:</u>



$$P_{ui} = \iint_{\Sigma} \vec{S} \cdot d\vec{\Sigma}$$

$$= \iint_{\Sigma} S \cdot d\Sigma \cdot \cos(0°)$$

$$= S \cdot \Sigma$$

$$P_{ui} = S \cdot \pi R^2 \quad \left(\Sigma_{disque} = \pi \cdot R^2 \right).$$

b. $P_{moy} = \langle S \rangle \pi R^2.$

$$= \left\langle \frac{1}{\mu_0} E_0 \cdot B_0 \cos^2(kz - \omega t) \right\rangle \pi R^2.$$

$$= \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \underbrace{\langle \cos^2(kz - \omega t) \rangle_T}_{\frac{1}{2}} \pi R^2.$$

$$\underline{P_{moy} = \frac{E_0 B_0 \pi R^2}{2\mu_0}}$$

<u>A.N</u>: $P_{moy} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \cdot \pi R^2.$

$$= \frac{(10^6)^2}{2.4\cancel{\pi}.10^{-7} \cdot 3\,10^8} \cdot \cancel{\pi} \cdot (2.10^{-2})^2.$$

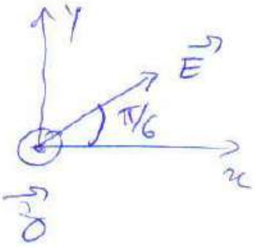
$$= \frac{(10^6)^2 10^{-4} \cancel{4}}{2.\cancel{4}.3\,10} = \frac{1}{6} \cdot 10^2 \cdot 10^{-1}\, 10^6$$

$$\simeq \frac{1}{6} \cdot 10^7 \simeq 0,15\, 10^7 \text{ Watts}.$$

Exercice 3. (5).

1- $\vec{E} \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \cos(kx - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z}$

2- $\vec{E} \begin{pmatrix} E_0 \cos\frac{\pi}{6} \cos(kz - \omega t) \\ E_0 \sin\frac{\pi}{6} \cos(kz - \omega . t) \\ 0 \end{pmatrix}$



$\vec{E} \begin{pmatrix} E_0 . \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(kz - \omega t) \\ E_0 . \frac{1}{2} \cos(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$

3- $\vec{E} \begin{pmatrix} E_0 \cos(kz - \omega t) \\ E_0 \cos(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}) \\ 0 \end{pmatrix}$ $\left(\varphi = +\pi/2 \right.$ circulaire gauche $\left. \right)$.

4- $\vec{E} \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(kz - \omega . t) \\ \frac{E_{0x}}{3} \cos(kz - \omega . t - \frac{\pi}{3}) \\ 0 \end{pmatrix}$