D.E Propagation électromagnétique L_2 - PL_2
(Durée 2h).

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.
Réponses exclusivement sur le sujet

Partie Cours (Sur 5 points)

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1) a- Donner la signification physique du vecteur de Poynting $\vec{S}$.

Le vecteur de Poynting $\vec{S}$ véhicule la puissance surfacique de l'onde électromagnétique.
Pour une OPP, il est colinéaire à l'axe de propagation, ~~son~~ expression est $\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu}$.

b- En utilisant les propriétés d'ondes planes dans le vide, montrer que le vecteur de Poynting $\vec{S}$ s'écrit pour une OPPS qui se propage dans l'air, avec une vitesse c, sur l'axe Ox, comme : $\vec{S} = S_0 \cos^2(k.x - \omega.t).\vec{e}_x$. Préciser l'expression de S_0 en fonction de μ_0, E_0 et c. Justifier le calcul.

$\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ propagation sur $\vec{Ox}$

$E(x,t) = E_0 \cos(kx - wt)$.
$B(x,t) = B_0 \cos(kx - wt)$.

et $\vec{E} \perp \vec{B}$

$(\vec{E}, \vec{B}, \vec{e}_x)$ trièdre direct $\Rightarrow \vec{E} \wedge \vec{B} = EB\, \vec{e}_x$.

d'où $\vec{S} = \frac{EB}{\mu_0} \vec{e}_x = \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \cos^2(kx - wt) \vec{e}_x$.

avec $B_0 = \frac{E_0}{c} \Rightarrow \vec{S} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(kx - wt) \vec{e}_x$. " S_0 = valeur max.

d'où $\vec{S} = S_0 \cos^2(kx - wt) \vec{e}_x$

2) L'équation du bilan énergétique de la propagation d'une onde électromagnétique est donnée par :

$$\underset{(1)}{\frac{\partial W_{e,m}}{\partial t}} = -\underset{(2)}{\oiint_{\Sigma} \vec{S}.d\vec{\Sigma}} - \underset{(3)}{\iiint_{\tau} (\vec{J}.\vec{E})\,d\tau}$$

Donner l'interprétation physique des termes (1), (2) et (3), en expliquant le signe (–) devant les termes (2) et (3).

(1) représente la variation de l'énergie électromagnétique dans le temps, c'est à dire la puissance totale de l'onde électromagnétique.
(2) = puissance de rayonnement de l'O.E.M.
(3) = " dissipée par effet Joule.
le signe (–) signifie que ce sont des puissances cédées (ou perdues) par le syst où se crée l'OEM

3) a- Définir l'état de polarisation d'une O.E.M.

L'état de polarisation donne ce que décrit l'extrémité du vecteur champ électrique pendant la propagation. Evolution de $\vec{E}$ ds le plan de polarisation qui est ⊥ à la direct de propag

b- Préciser les trois types de polarisation, ainsi que les intérêts d'une onde polarisée.

Il y a 3 types de polarisation.
- rectiligne : $\vec{E}$ décrit une droite.
- circulaire : " " un cercle.
- elliptique : " " une ellipse.
La polarisation de la lumière permet un calcul plus simple. Avec une lumière polarisée on peut faire de l'interférence, de l'Holographie et sonder la matière et ses propriétés.

Exercice 1 (Sur 6 points)

On considère un faisceau laser de rayon R, d'axe Oz, composé d'O.E.M.P.P.S, tel que l'amplitude du champ électrique est $E_0 = 10^7$ V/m. (Propagation dans l'air avec une vitesse $c = 3.10^8$m/s).

1) Donner l'expression du champ électrique, sachant que l'onde de ce faisceau est polarisée rectilignement suivant Ox. Justifier votre réponse.

. axe de propagation = axe du faisceau = axe $\vec{Oz}$

. polarisation rectiligne sur $\vec{Ox}$ $\Rightarrow$ $\vec{E} = E.\vec{e}_x$

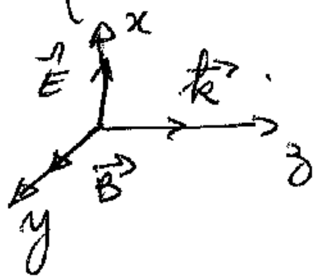
d'où : $\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(k.z - \omega t)\,\vec{e}_x$.

2) Retrouver l'expression du champ magnétique, en utilisant les propriétés des ondes planes dans le vide (ou dans l'air), sans faire de calcul. Représenter les vecteurs $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{k}$.

$(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$ trièdre direct (car OPPS) dans l'air

$\vec{B}(z,t) = B_0 \cos(k.z - \omega t)\,\vec{e}_y$

$B_0 = \frac{E_0}{c}$



3) Calculer les composantes du vecteur de Poynting $\vec{S}$. Représenter ce vecteur et préciser l'expression de son amplitude en fonction de E_0, μ_0, et c.

$\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{e}_z)$ trièdre direct.

$\vec{E} \perp \vec{B}$

$\Rightarrow \vec{S} = \frac{EB}{\mu_0}\vec{e}_z = \frac{E_0 B_0}{\mu_0}\cos^2(kz - \omega t)\,\vec{e}_z$.

amplitude de $\vec{S}$.

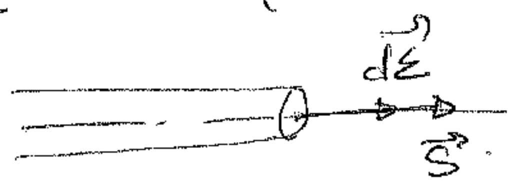
$S_0 = \frac{E_0 B_0}{\mu_0}$; $B_0 = \frac{E_0}{c}$ $\Rightarrow$ $S_0 = \frac{E_0^2}{\mu_0 . c}$.

4) a- Exprimer la puissance de rayonnement de ce laser, ainsi que la puissance moyenne en fonction de R, E_0, μ_0, et c.

$P_{ui} = \Phi(\vec{S}) = \iint_\Sigma \vec{S}\cdot\vec{d\Sigma}$ (Par déf).

$\vec{S}\cdot\vec{d\Sigma} = S\,d\Sigma\cos(0°)$.

et $d\Sigma = r\,dr\,d\theta$.



$S = S(z,t)$.

$P_{ui} = S(z,t)\cdot\int_0^R r\,dr\int_0^{2\pi}d\theta = S(z,t).\pi R^2$ et $P_{moy} = \frac{S_0}{2}\pi R^2$

Car $\langle\cos^2(kz-\omega t)\rangle_T = \frac{1}{2}$.

b- En déduire l'expression du rayon laser R, pour lequel la puissance moyenne délivrée est de 10^7W. Faire le calcul numérique pour $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\,S.I$, $c = 3.10^8$m/s et $E_0 = 10^7$ V/m.

$P_{moy} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}.\pi R^2 \Rightarrow R^2 = \frac{2\mu_0 c\,P_{moy}}{E_0^2.\pi}$.

$R = \frac{1}{E_0}\sqrt{\frac{2\mu_0 c.P_{moy}}{\pi}}$ A.N $R = \frac{1}{10^7}\sqrt{\frac{2.4\pi 10^{-7}.3\,10^8\,10^7}{\pi}}$

$= 2\sqrt{6}.10^{-3} = 2\sqrt{6}$ mm.

Exercice 2 *(sur 5 points)*

Le champ électrique d'une onde radio, considérée comme O. P.P.S, qui se propage dans l'air avec une vitesse $c = 3.10^8 m/s$ est :

$$\vec{E}(y,z,t) = (10^2\vec{e}_y - \sqrt{3}.10^2\vec{e}_z).\cos(\pi\frac{\sqrt{2}}{2}(y+z)-\omega.t)$$

1)a- Donner les composantes du vecteur $\vec{E}_0$, ainsi que les composantes du vecteur d'onde $\vec{k}$.

$\vec{E}_0 = 10^2\,\vec{e}_y - \sqrt{3}\,10^2\,\vec{e}_z$

$\vec{E}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 10^2 \\ -\sqrt{3}.10^2 \end{pmatrix}_{\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z}$; $\vec{k}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}_{\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z}$.

b- En déduire la valeur de l'amplitude E_0 et la norme du vecteur d'onde $\vec{k}$.

$$E_0 = \sqrt{E_{0y}^2 + E_{0z}^2} = \sqrt{(10^2)^2 + (-\sqrt{3}\,10^2)^2} = 10^2\sqrt{1+3}$$
$$= 2.10^2 \ Vm^{-1}$$
$$k = \sqrt{k_y^2 + k_z^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{2}\right)^2 (1+1)} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.\sqrt{2} = \pi \ rd\,m^{-1}$$

c- Calculer la longueur d'onde λ, la pulsation ω, ainsi que la fréquence de l'onde.

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\pi} = 2\,m$$ (il s'agit d'une onde radio de grande long d'onde)

$$\omega = k.c = \pi.\,3\,10^8 \ rd\,s^{-1}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3\pi\,10^8}{2\pi} = 1{,}5.10^8\ Hz = 150\ MHz.$$

2) Utiliser une des équations de Maxwell en notation complexe pour calculer les composantes du champ magnétique $\vec{B}$. Représenter ce vecteur et calculer son amplitude B_0 .

$$\vec{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$ ($3^{ème}$ éq de Maxwell).

$$\vec{\nabla} = i\vec{k} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$$ (en not complexe)

$$\Rightarrow i\vec{k} \wedge \vec{E} = -(-i\omega\vec{B}) \quad \text{d'où} \quad \vec{B} = \frac{1}{\omega}(\vec{k} \wedge \vec{E}).$$

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} k_y E_z - k_z E_y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{B} = \frac{\pi\sqrt{2}\,10^2}{2\,\omega} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} - 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \cos\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{2}(y+z) - \omega t\right).$$

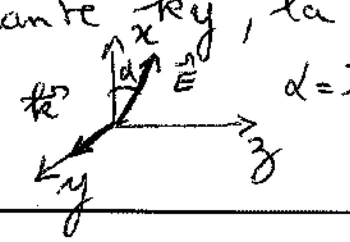
$$\text{et } B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{2\,10^2}{3\,10^8} = 0{,}67.\,10^{-6}\ \text{Tesla}.$$

Exercice 3 (Sur 4 points)

A) Donner la direction de propagation, ainsi que l'état de polarisation de chacune des deux ondes, représentées par les champs électriques suivants. **Justifier vos réponses.** Faire un schéma pour chaque cas, en représentant le vecteur champ électrique $\vec{E}$ et le vecteur d'onde $\vec{k}$.

1- $$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \cos(\pi/6).\cos(k.y - \omega.t) \\ 0 \\ E_0 \sin(\pi/6).\cos(k.y - \omega.t) \end{pmatrix}$$

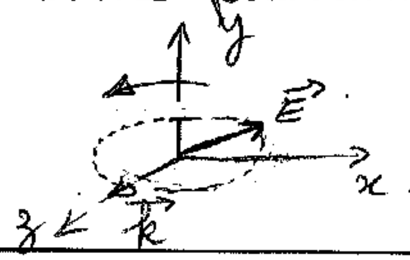
Pas de déphasage entre les 2 composantes de $\vec{E}$ la polarisation est donc rectiligne.
Le champ $\vec{E}$ a 2 composantes E_x et E_z, la droite de polarisation est dans le plan xoz à $\frac{\pi}{6}$ de l'axe $\vec{Ox}$.
. Le vecteur $\vec{k}$ a une seule composante k_y, la propagation se fait vers les $y > 0$



$\alpha = \frac{\pi}{6}$.

2- $$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(k.z - \omega.t) \\ E_{0y} \cos(k.z - \omega.t + \frac{\pi}{2}) \\ 0 \end{pmatrix}$$ (Avec : $E_{0x} > E_{0y}$)

. il y a un déphasage de $+\pi/2$ entre E_y et E_{0x}
. $E_{0x} > E_{0y}$, il s'agit donc d'une polarisation elliptique gauche.
. $\vec{k}$ a une seule composante sur $\vec{Oz}$
la propagation est vers les $z > 0$



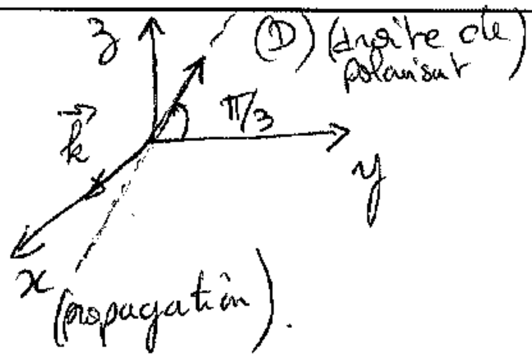
B) Ecrire les composantes du champ électrique $\vec{E}$ d'une OEMPPS, de pulsation ω, de nombre d'onde k, qui se propage dans l'air avec les caractéristiques suivantes :

1) Propagation sur l'axe Oz et polarisation circulaire gauche.

$\vec{k} = \begin{pmatrix}0\\0\\k\end{pmatrix}$ $\quad \vec{E}\begin{pmatrix}E_x\\E_y\\0\end{pmatrix}$; E_y déphasé de $+\frac{\pi}{2}$ par rapport à E_x.

$$\vec{E} = \begin{pmatrix}E_0\cos(kz-\omega t)\\E_0\cos(kz-\omega t+\frac{\pi}{2})\\0\end{pmatrix}$$

2) Propagation sur l'axe Ox et polarisation rectiligne à $\pi/3$ de l'axe Oy.



$$\vec{E}\begin{pmatrix}0\\E_y = E_0\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(kx-\omega t)\\E_z = E_0\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(kx-\omega t)\end{pmatrix}$$