EFREI-ESIGETEL
2013/2014

D.E de Propagation électromagnétique L_2 - PL_2
(Durée 2h).

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.
Réponses exclusivement sur le sujet

Partie Cours (Sur 5 points)

Les questions sont indépendantes.

1- Donner l'interprétation physique des deux équations de Maxwell :

$$div(\vec{B}) = 0$$

$$ro\vec{t}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

2- a) Donner la signification de chacune des expressions.

$$\oiint_{\Sigma} \vec{S}.d\vec{\Sigma} \quad \text{et} \quad \iiint_{\tau} (\vec{J}.\vec{E}) d\tau$$

b) Réécrire ces deux expressions dans le milieu air (ou vide), justifier votre réponse.

3- a) Définir l'état de polarisation d'une onde électromagnétique et préciser les différents types de polarisation.

b) Donner pour chacun des types une écriture du champ électrique d'une onde plane progressive sinusoïdale qui se propage dans l'air et sur l'axe Ox.

1) $div(\vec{B}) = 0$: signifie que $\vec{B}$ est à flux conservatif et que les lignes de $\vec{B}$ sont fermées.

$\vec{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$: exprime le phénomène d'auto-induction lorsqu'un champ $\vec{B}$ traversant le système est variable au cours du temps, il engendre la création d'un champ $\vec{E}$ qui fait déplacer les e^- du conducteur et donc l'apparition d'un courant induit.

2) a) $\oiint_\Sigma \vec{S}\cdot d\vec{\Sigma}$ est la puissance de rayonnement d'une onde électromagnétique dans un milieu quelconque.

$\iiint_\tau (\vec{J}\cdot\vec{E})\, d\tau$ = puissance dissipée par effet Joule

b) dans le vide la première puissance reste inchangée car elle ne dépend pas du milieu ; la deuxième est nulle car pas de densité de courant dans le vide ($\vec{J}=\vec{0}$)

3) a) La polarisation est ce que décrit l'extrémité du champ $\vec{E}$ pendant la propagation (rectiligne, circulaire et elliptique).

b) rectiligne (suivant $\vec{Oy}$)
$\vec{E} = E_0 \cos(kx-\omega t)\,\vec{e}_y$

circulaire
$\vec{E}\begin{pmatrix} 0 \\ E_0\cos(kx-\omega t) \\ E_0 \sin(kx-\omega t)\end{pmatrix}$

elliptique
$\vec{E}\begin{pmatrix} 0 \\ E_{0y}\cos(kx-\omega t) \\ E_{0z}\cos(kx-\omega t+\pi/2)\end{pmatrix}$

Exercice 1 (Sur 5 points)

On considère une onde lumineuse qui se propage dans l'air avec une célérité c = 3.10^8 m/s.
L'onde est plane progressive sinusoïdale de champ électrique :

$$\vec{E}(y,z,t) = E_0 \cos(k.\frac{\sqrt{2}}{2}(y+z)-\omega.t).\vec{e}_X$$, où E_0, ω, et k sont des constantes positives.

1- Donner les composantes du vecteur d'onde $\vec{k}$, en déduire la direction de propagation. Justifier votre réponse.

$\vec{k}\begin{pmatrix} 0 \\ k\frac{\sqrt{2}}{2} \\ k\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}_{\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z}$; l'onde se propage dans le plan (yOz) tel que :

$tg(\alpha) = \frac{k_z}{k_y} = 1$

d'où $\alpha = \frac{\pi}{4}$

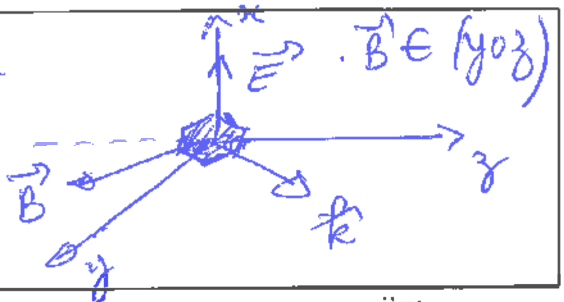
L'onde se propage dans le plan (yOz) à $\pi/4$ de l'axe $(\vec{Oy})$

2- Utiliser une des propriétés d'ondes planes dans le vide (ou dans l'air), pour représenter les vecteurs $(\vec{E},\vec{B},\vec{k})$ dans le trièdre (O, x, y, z).

$(\vec{E},\vec{B},\vec{k})$ forment un trièdre direct

$\vec{E}$ est sur $\vec{Ox}$ par hypothèse

$\vec{k}$ dans le plan (yoz)



3- a) Retrouver les composantes du champ magnétique $\vec{B}$ par le calcul, en utilisant la 3$^{\text{ième}}$ équation de Maxwell en notation complexe.

$$\vec{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial}{\partial t} = -i\omega \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} = i\vec{k}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -(-i\omega\vec{B})$$

$$i\vec{k} \wedge \vec{E} = i\omega\vec{B} \quad \text{d'où} \quad \vec{B} = \frac{1}{\omega}(\vec{k} \wedge \vec{E})$$

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ k\sqrt{2}/2 \\ k\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{k\sqrt{2}E}{2\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{k\sqrt{2}}{2\omega} \cdot E \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \underset{(\omega = k.c)}{\Rightarrow} \vec{B} = \begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = \frac{\sqrt{2}}{2c} E(y,z,t) \\ B_z = -\frac{\sqrt{2}}{2c} \cdot E(y,z,t) \end{cases}$$

b) Calculer B_0 sachant que $E_0 = 10^6 V.m^{-1}$

$$B_0 = \frac{E_0}{c} \quad \text{(une des propriétés d'ondes planes (vide))}$$

$$B_0 = \frac{10^6}{3.10^8} = 0{,}33 \cdot 10^{-2}\ T = 3{,}33\ mT$$

4- Donner les composantes du vecteur de Poynting $\vec{S}$.

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2c} E \\ -\frac{\sqrt{2}}{2c} \cdot E \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{2}E^2}{2\mu_0 c} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2\mu_0 c} E^2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2\mu_0 c} E^2 \end{pmatrix}_{/\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z}$$

Exercice 2 (sur 4 points)

1- Utiliser les équations de Maxwell pour retrouver l'équation de propagation du champ magnétique dans un milieu matériel quelconque, donnée par :

$$\Delta\vec{B} - \mu.\varepsilon\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = -\mu\vec{rot}(\vec{J})$$

On donne : $\Delta\vec{U} = \vec{grad}(div(\vec{U})) - \vec{rot}(\vec{rot}(\vec{U}))$ pour un vecteur $\vec{U}$ quelconque.

on remplace $\vec{B}$ dans l'identité.

$$\Delta\vec{B} = \vec{grad}(\underbrace{div\vec{B}}_{2^\circ}) - \vec{rot}(\underbrace{\vec{rot}\vec{B}}_{4^\circ})$$

$$= \vec{grad}(0) - \vec{rot}\left(\mu\vec{J} + \mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$\Delta\vec{B} = \vec{0} - \mu\,\vec{rot}(\vec{J}) - \mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(\underbrace{\vec{rot}\vec{E}}_{3^\circ})$$

$$= -\mu\,\vec{rot}(\vec{J}) - \mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)$$

d'où $\boxed{\Delta\vec{B} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = -\mu\,\vec{rot}(\vec{J})}$ C.Q.F.D

2- a) Réécrire cette équation dans le milieu air (ou vide). Justifier votre réponse.

dans le milieu air ou vide il n'y a pas de courant et donc la densité de courant $\vec{J}$ est nulle

d'où $\Delta\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0 . \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$ *

avec $(\mu = \mu_0 ; \varepsilon = \varepsilon_0)$

b) A quoi est homogène la constante $\mu_0.\varepsilon_0$? En déduire l'expression de la célérité c dans le milieu vide (ou air) des ondes électromagnétique en fonction des constantes μ_0 et ε_0.

D'après * $\mu_0\varepsilon_0 = \dfrac{\Delta B_x}{\frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2}}$ si on prend $B = B_x$

or ΔB_x est homogène à $T.m^{-2}$

$\frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2}$ " " à $T.s^{-2}$

d'où $\mu_0\varepsilon_0$ est homogène à $\frac{m^{-2}}{s^{-2}} = \frac{1}{(m\,s^{-1})^2} \Rightarrow \mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$

Exercice 3 (sur 6 points)

Un faisceau lumineux formé d'ondes électromagnétiques planes, progressives et sinusoïdales. Cette onde se propage dans l'air avec une vitesse $c = 3.10^8$ m.s^{-1}.

1- Ecrire le vecteur champ électrique de cette onde sachant qu'il est polarisé rectilignement sur l'axe (Oy) et l'onde se propage sur l'axe (Ox) vers les x > 0.

polarisation rectiligne sur $\vec{Oy} \Rightarrow \vec{E} = E.\vec{e_y}$.
propagation sur $\vec{Ox} \Rightarrow \vec{k} = k.\vec{e_x} \Rightarrow E(x,t)$
est $\vec{E} = E(x,t)\,\vec{e_y} = E_0 \cos(k.x - wt)\,\vec{e_y}$.

2- La longueur d'onde du faisceau est $\lambda = 6.10^{-6}\,m$. Calculer le nombre d'onde k, la pulsation ω ainsi que la fréquence f. (On considère: $\pi \approx 3$).

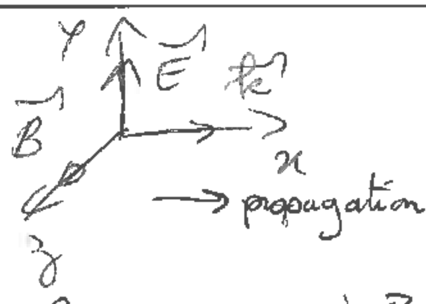
$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{6.10^{-6}} \simeq 10^6$ rd.m^{-1}

$w = k.c = 10^6 . 3\,10^8 = 3.10^{14}$ rad s^{-1}

$f = \frac{w}{2\pi} = \frac{3.10^{14}}{2\pi} \simeq \frac{1}{2}.10^{14} = 0,5.10^{14}$ Hz
$= 5.10^{13}$ Hz.

3- Donner l'écriture du vecteur champ magnétique eu utilisant les propriétés des OPPS dans l'air. (Sans faire de calcul). Calculer B_0, sachant que $E_0 = 10^6 V.m^{-1}$.

• $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$ trièdre direct



$\vec{E}$ est sur $\vec{Oy}$
$\vec{k}$ est sur $\vec{Ox}$
d'où $\vec{B}$ sera sur $\vec{Oz}$; $\vec{B}(x,t) = B_0 \cos(kx - wt)\,\vec{e_z}$

• $B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{10^6}{3\,10^8} = 0,33\,10^{-2}$ T.

4- **a)** Calculer la densité d'énergie maximale de ce faisceau. On donne $\mu_0 = 4\pi.10^{-7} SI$ et $\varepsilon_0 = 9.10^{-12} SI$.
Sachant que la densité d'énergie électrique est égale à la densité d'énergie magnétique.
b) En déduire la densité maximale des photons contenus dans ce faisceau.
On donne $h = 6{,}6.10^{-34}\, J.s$ (Tenir compte de l'aspect corpusculaire de cette onde).

• $U = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu}B^2 = w_e + w_m$ or $w_e = w_m$

d'où $U = 2\left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2\right) = \varepsilon E^2$

$U_{max} = \varepsilon_0 E_0^2$ car $E_{max} = E_0$

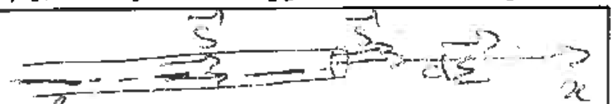
$= 9.10^{-12}.10^{12} = 9\ J/m^3$

• $U_{max} = n_{max}.h.\nu$ (ν = fréquence du photon = fréq de l'onde)

$\Rightarrow n_{max} = \frac{U_{max}}{h\nu} \simeq 2{,}7.10^{20}$ photons$/m^3$

5- Le faisceau lumineux a un rayon R = 1mm, exprimer la puissance de rayonnement ainsi que la puissance de rayonnement moyenne en fonction de R, μ_0, c et E_0. Faire l'application numérique.

$P_{ui} = \iint_\Sigma \vec{S}.\,d\vec{\Sigma}$



$= \iint_\Sigma S.\,d\Sigma \cos(0°) = \int_0^R\int_0^{2\pi} S(x,t)\, r\,dr\,d\theta$

$= S(x,t)\int_0^R r\,dr \int_0^{2\pi} d\theta = S(x,t)\,\pi R^2$

$\langle P_{ui}\rangle = \langle S(x,t)\rangle\,\pi R^2 = \frac{S_0}{2}\pi R^2 = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0}\pi R^2$

A.N. $\langle P_{ui}\rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\pi R^2 \simeq 4.10^3$ Watts.

Formulaire

1- Equations de Maxwell dans un milieu matériel quelconque

1) $div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon}$

2) $div(\vec{B}) = 0$

3) $ro\vec{t}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

4) $ro\vec{t}(\vec{B}) = \mu.\vec{J} + \mu\varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

2- Notation complexe

$\vec{\nabla} = i\vec{k}$

$\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$