GAUTIER Arthur
L2 - 2014

Décembre 2014

Groupe : C

10/20

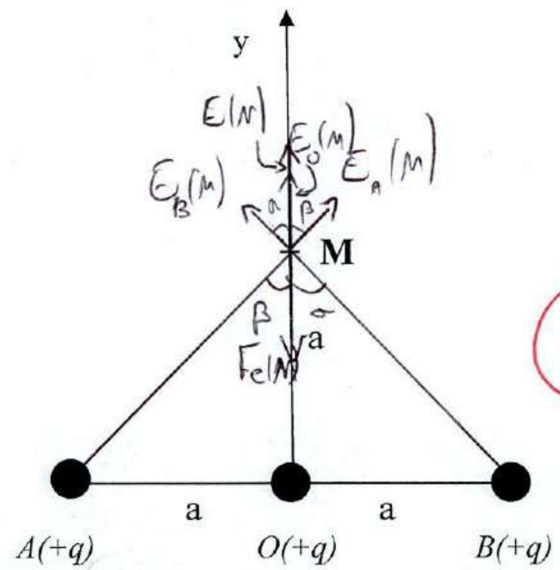
... ue L_2-PL_2

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.

Réponses exclusivement sur le sujet

Exercice 1 ***Distribution discrète de charges*** (Sur 7 points) 4,5

On considère trois charges ponctuelles identiques et positives, placées respectivement aux points A, O et B. Le point M appartient à la médiatrice de AB, tel que : OM = OA = OB = a.



0,5

1- Représenter sur le schéma ci-dessus les vecteurs champs électrostatiques créés par chacune des particules au point M, ainsi que le champ résultant au même point M.

2- a) Exprimer les normes des vecteurs champs électriques : $E_A(M)$, $E_B(M)$ et $E_O(M)$, en fonction de k, q et a.

$E_A(M) = \frac{k \cdot |q|}{r^2} = \frac{k \cdot q}{2a^2}$ $V.m^{-2}$

$E_B(M) = \frac{k \cdot q}{2a^2}$ $V.m^{-2}$

$E_O(M) = \frac{k \cdot q}{a^2}$ $V.m^{-2}$

1

b) En déduire l'expression de la norme du champ électrique total E(M), en fonction de k, q et a.

$E(M) = E_A(M) + E_B(M) + E_O(M)$

$E(M) = \begin{pmatrix} E_x = \\ E_y = \end{pmatrix}$

Arct: 0. les deux triangles sont isocèle rectangles donc $\alpha = \beta = 45° = \frac{\pi}{2}$

Donc $E(x) = E_A(M)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - E_B(M)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$E(y) = E_A(M)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + E_B(M)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + E_C(M)$

$= \frac{k.q}{2a^2} + \cancel{\frac{k.q}{2a^2} + \frac{k.q}{a^2} = \frac{2k.q}{a^2}\ V.m^{-2}}$

$E(M) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2kq}{a^2} \end{pmatrix}$

0 W

3- On place au point M une charge négative (-q), en déduire la force électrique exercée sur (-q), donner son écriture vectorielle et sa norme. Représenter cette force.

$F_e = \frac{k.q_1.q_2}{r^2}$

0 W

$\vec{F_e}(M) = \vec{F_e}(A/M) + \vec{F_e}(B/M) + \vec{F_e}(C/M)$

$F_e(A/M) = \frac{k.q\times -q}{2a^2}$, $F_e(B/M) = \frac{k.q\times -q}{2a^2}$, $F_e(C/M) = \frac{k.q.-q}{a^2}$

$F_e(M) = \cancel{-\frac{kq^2}{2a^2} - \frac{kq^2}{2a^2} - \frac{kq^2}{a^2} = -\frac{2kq^2}{a^2}\ N}$

4- a) Exprimer le potentiel électrique V(M), créé par cette distribution au point M, en fonction de k, q et a.

$V = \sum_i \frac{kq_i}{r_i} = k\left(\frac{q}{a\sqrt{2}} + \frac{q}{a\sqrt{2}} + \frac{q}{a}\right) = k\left(\frac{2q}{a\sqrt{2}} + \frac{q\sqrt{2}}{a\sqrt{2}}\right) = k\left(\frac{q(2+\sqrt{2})}{a\sqrt{2}}\right)\ V.m^{-1}$

1

1- Utiliser l'expression donnée ci-dessus pour retrouver celle du champ magnétique créé au centre de la spire B(O). Représenter ce vecteur.

Au centre de la spire, OM = OO = O = 3

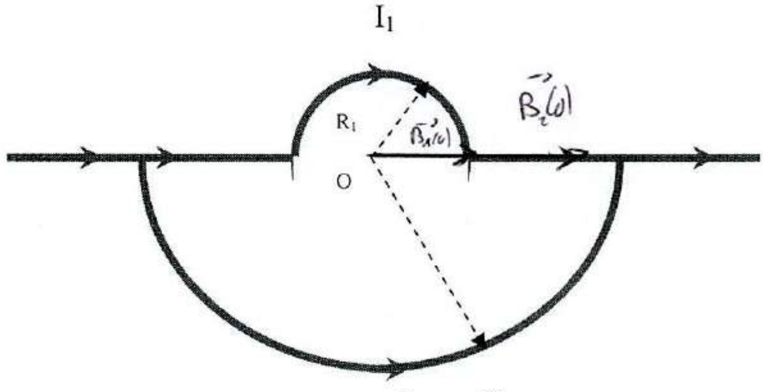
Donc $\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I \cancel{R^2}}{2 R^{\cancel{3}}} \cdot \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{e}_z$ V.m^{-1}

1

2- a) Utiliser ce dernier résultat pour exprimer les champs magnétiques $B_1(O)$ et $B_2(O)$ créés respectivement par les deux demi spires de rayons R_1 et R_2 au centre O (Figure ci-dessous).

Représenter les vecteurs $\vec{B}_1(O)$ et $\vec{B}_2(O)$.

(Donner ($B_1(O)$ en fonction de μ_0, R_1, I_1 et $B_2(O)$ en fonction de μ_0, R_2, I_2).



$\vec{B}_1(O) = \frac{\mu_0 I_1}{\cancel{2}4 R_1} \cdot \vec{e}_z$ V.m^{-1}

2

$\vec{B}_2(O) = \frac{\mu_0 I_2}{\cancel{2}4 R_2} \vec{e}_z$ V.m^{-1}

b) En déduire la norme du champ magnétique total, créé au centre O par l'ensemble du circuit, en fonction de $\mu_0, R_1, I_1, R_2, I_2$.

$$B(O) = B_1(O) + B_2(O)$$

$$= \frac{\mu_0 I_1}{4R_1} + \frac{\mu_0 I_2}{4R_2} = \mu_0 \left(\frac{I_1}{4R_1} + \frac{I_2}{4R_2} \right) V.m^{-1}$$

Formulaire

1- Théorème de Gauss :

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint_{Sg} \vec{E}.d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

2- Elément de surface latérale d'un cylindre de rayon r et de hauteur h :

$$dS_{lat} = r d\theta . dz$$

3- Composantes du gradient en coordonnées cylindriques

$$\vec{grad} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}.\dfrac{\partial}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

4 - Composantes du gradient en coordonnées sphériques

$$\vec{grad} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}.\dfrac{\partial}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r\sin(\theta)}.\dfrac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

GAUTIER Arthur Groupe C

b) En déduire l'énergie potentielle électrique E_{pe} de la charge (-q) en fonction de k, q et a.

$E_{pe} = q_A \times V_M = -q \frac{k q (2+\sqrt{2})}{a\sqrt{2}} = k\left(-\frac{q^2(2+\sqrt{2})}{a\sqrt{2}}\right)$

1

Exercice 2 ***Théorème de Gauss*** (7 points)

2

Partie A

Un cylindre creux d'axe Oz, de rayon R, de longueur infiniment grande h est chargé uniformément en surface latérale avec une charge positive Q.

1- Utiliser la règle de symétrie et les invariances pour donner la direction et les variables du champ électrique crée par ce cylindre.

. Le système ne change pas par rotation autour de l'axe zz' donc le champ est radial

1

. Par translation de zz' le système ne change pas donc le système est chargé d'une densité σ = cste

2 a) A l'aide du théorème de Gauss, exprimer le champ électrique, dans les régions r < R et r > R.

$\Phi(E) = \oiint_{S_G} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

Champ radial et surface latérale

$\Phi(E) = E \iint_{S_{lat}} dS_{lat} = E \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r \, d\theta \, dz$

$= E \int_0^{\pi} r \times 2\pi \, dz$

$= E \cdot$ ~~AAA~~ $r \times 2\pi^2$

$= E \cdot 2r\pi^2$

Pour r < R

$Q_{int} = 0$ donc $E = 0$

$\left(\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = E 2r\pi^2\right)$

ok

Pour r > R

$Q_{int} = \sigma$ donc

$E = \frac{\sigma}{\cancel{2r\pi^2 \varepsilon_0}}$

b) Tracer le champ électrique E(r) en fonction de r et commenter cette variation.

3- Exprimer les fonctions potentiels électriques V(M) dans les régions r < R et r > R.

$W = E = -\,\mathrm{grad}(V)$.

E est radial donc $\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta} = 0$ et $\frac{\partial}{\partial z} = 0$.

$r \leq R$

$E \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow V(M)$ cste

$r > R$

$E : \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{2r\pi^2\varepsilon_0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow V(M) = \frac{-\sigma}{r^2\, 2\pi^2 \varepsilon_0}$ $V\,m^{-1}$

Partie B

Une distribution de charges à symétrie sphérique autour d'un point O, crée en un point M quelconque de l'espace, situé à une distance r de O, un potentiel de la forme :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}\exp\left(-\frac{r}{a_0}\right),$$ Où a_0, q et ε_0 sont des constantes positives.

1- Exprimer le vecteur champ électrique $\vec{E}(M)$ créé par cette distribution sphérique au point M situé à une distance r de O. examiner les cas particuliers $r \ll a_0$ et $r \gg a_0$; Donner la signification de a_0

$E = -\,\mathrm{grad}(V)$

$E = -\begin{pmatrix} \frac{\partial V(r)}{\partial r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{2a_0} e^{-\frac{r}{a_0}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc E est radial

Pour $r \ll a_0$,

$e^{-\frac{r}{a_0}} = e^{0} = 1$

$E = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{2a_0}$.

Pour $r \gg a_0$

$E = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{2a_0}\, e^{-r}$

a_0 représente le rayon de la sphère

2- Exprimer le flux Φ (r) sortant d'une sphère de rayon r.

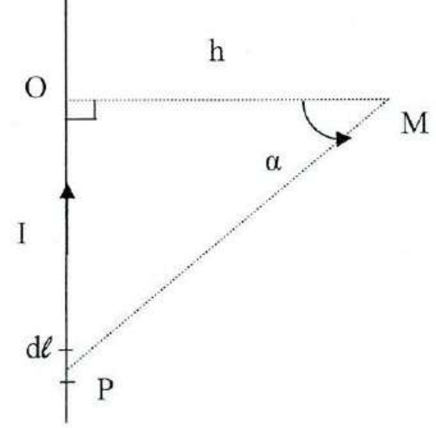
Exercice 3 ***Magnétostatique*** (Sur 6 points)

$\boxed{B, r}$

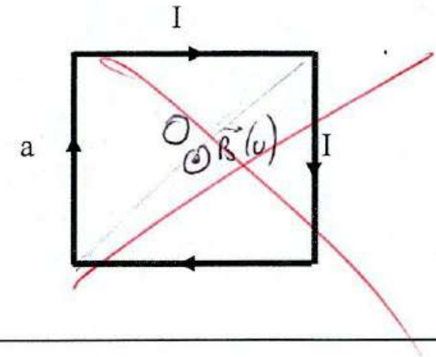
Partie A

On montre à l'aide de la loi de Biot-Savart (voir formulaire), que la norme du champ magnétique élémentaire dB créé par un courant I traversant un élément de longueur $d\ell$ s'exprime par :

$$dB = \frac{\mu_0 . I}{4\pi . h}\cos(\alpha) d\alpha \; ; \qquad \text{Où } OM = h.$$



Utiliser l'expression donnée ci-dessus pour exprimer le champ magnétique total B(O) créé au centre O d'une spire carrée de côté a, **en fonction de μ_0, I et a**. Représenter le vecteur $\vec{B}(O)$.



$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \cos(\alpha)\, d(\alpha)$ V.m^{-1}

$B(O) = 2 \times dB$ (puisque le carré est la jonction de deux triangles rectangles isocèles)

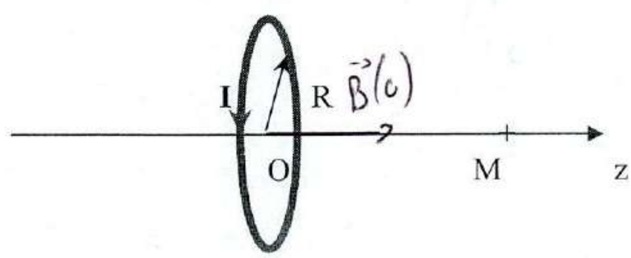
$= \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \cos(\alpha)\, d(\alpha)$ V.m^{-1}

0 N

Le vecteur $\vec{B}(O)$ est dirigé vers nous

Partie B

Une spire de rayon R, d'axe Oz et de centre O est parcouru par un courant constant I. **Le courant est orienté vers vous.**



On montre à l'aide de la loi de Biot-Savart que le champ magnétique créé en un point M de l'axe (Oz) à la distance OM = z s'exprime par :

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 . I . R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}} . \vec{e}_z \quad (\vec{e}_z : \text{vecteur unitaire})$$