EFREI-ESIGETEL Nom : GAUTIER Prénom : Arthur Groupe : C
2014/2015

13,5

GAUTIER Arthur
L2 - 2014

D.E de Propagation électron[...]
Les calculatrices et les do[...]
Réponses exclu[...]

13,5/20

Exercice 1 (Sur 4 points)

On considère l'équation de propagation du champ électrique dans un milieu matériel quelconque donnée par : $\Delta\vec{E} - \mu.\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \dfrac{1}{\varepsilon}\,\vec{grad}(\rho) + \mu\dfrac{\partial\vec{J}}{\partial t}$

1) Ecrire cette dans le milieu vide, **en fonction de la célérité c** des ondes électromagnétiques dans le vide. Cette équation est appelée **équation de D'Alembert**.

Dans le vide, $\rho = 0$, $\vec{J} = \vec{0}$, $\mu = \mu_0$ et $\varepsilon = \varepsilon_0$. De plus, $c^2 = \dfrac{1}{\mu_0\varepsilon_0}$. D'où

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0.$$

1

2) On considère le champ électrique d'expression $\vec{E}(x,t) = E_0\cos(k.x - \omega.t).\vec{e}_z$

a) Exprimer le Laplacien de $\vec{E}$: $\Delta\vec{E}$ en fonction de $\vec{E}$.

$$\Delta\vec{E} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(-k^2\vec{E}(x,t) \right)$$

1

b) Exprimer $\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$ en fonction de $\vec{E}$

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2\vec{E}(x,t)$$

1

c) En déduire une relation entre les constantes k, ω et c, sachant que ce champ éléctrique vérifie l'équation de D'Alembert obtenue dans la question (1).

$-k^2 \vec{E}(x,t) - \frac{1}{c^2} \times (-\omega^2) \vec{E}(x,t) = 0$

$-k^2 \vec{E}(x,t) + \frac{1}{c^2} \omega^2 \vec{E}(x,t) = 0$

$\vec{E}(x,t)\left(-k^2 + \frac{1}{c^2}\omega^2\right) = 0 \iff k = \frac{\omega}{c}$ 1

Exercice 2 (Sur 6 points)

On considère une OPPS qui se propage dans l'air avec une célérité $c = 3.10^8$ m.s^{-1}, dont le champ électrique est donné par :

$$\vec{E}(x,y,t) = E_0 \cos((k.\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{k}{2}y) - \omega.t).\vec{e}_z$$ (E_0, ω, et k sont des constantes positives).

1- Donner les composantes du vecteur d'onde $\vec{k}$ en fonction de k, en déduire la direction de propagation. Justifier votre.

$\vec{k}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x \\ \frac{1}{2}y \\ 0 \end{pmatrix}$ 0,5 k se propage dans le même sens et la même direction que l'onde donc dans une direction perpendiculaire à $\vec{E}$. Donc k se propage selon ~~[illegible]~~ plan (xoy)

2- Calculer la longueur d'onde λ et la fréquence f sachant que $k = 2\pi$ rad.m^{-1}.

$k = 2\pi$ rad.m^{-1} donc $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. $\|\vec{k}\| = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = 1$.

~~$\lambda = 2\pi$~~. λ est en m. Donc $\lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3.10^8}{\cancel{2\pi}}$ Hz.

0,5

3- Utiliser la troisième équation de Maxwell en notation complexe pour en déduire les composantes du vecteur champ magnétique. Calculer B_0 pour $E_0 = 10^3$ V.m^{-1}.

$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. En complexe, $\vec{\nabla} = i\vec{k}$ et $\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$

$\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}$ — 9r

$\vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{k} \wedge \vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k\frac{\sqrt{3}}{2} E_0 \cos\left(k\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{k}{2}y\right) - \omega t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} 10^3 \cos\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right) - \omega t\right) \end{pmatrix}$

4- Donner les composantes du vecteur de Poynting $\vec{S}$. Calculer son amplitude S_0 avec $\mu_0 = 4\pi.10^{-7} S.I$

$\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu} \Leftrightarrow \frac{E \cdot B}{\mu_0}$? Or, $E = cB$. $\vec{S} \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ 0 \end{pmatrix}$.

9r

$\Leftrightarrow \frac{E^2}{c\mu_0} \Leftrightarrow \frac{E_0^2 \cos^2\left(\left(k\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{k}{2}y\right) - \omega t\right)\vec{e_z}}{c\mu_0}$

$S_0 = \frac{E_0^2}{c\mu_0} = \frac{10^3}{3.10^8 \times 4\pi.10^{-7}} = \frac{1}{12\pi} \cdot 10^2$ — 9r

Exercice 3 (Sur 5 points)

Un faisceau laser composé d'OPPS, d'axe (Oz) et de rayon R se propage dans l'air avec une vitesse $c = 3.10^8 m.s^{-1}$.

1- Donner l'expression du vecteur de Poynting $\vec{S}(z,t)$ en utilisant les propriétés d'ondes planes dans l'air. Préciser l'expression de son amplitude S_0 en fonction de E_0, μ_0 et c.

$\vec{S} = S_0 \cos^2(kz - \omega t)\vec{e_z}$. $S_0 = \frac{E_0^2}{\mu_0 . c}$

1 à justifier.

2- a) Exprimer la puissance moyenne de rayonnement en fonction de E_0, μ_0, c et R.

$$P_{moy} = \iint S.d\Sigma = \iint \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(k_z - \omega t)\, dR\, d\theta$$

$$= \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(k_z - \omega t) \int_0^R R\,dR \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$P_{moy} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \times \frac{1}{2} \times \frac{R^2}{2} \times 2\pi$$

1,5

b) Faire le calcul pour $E_0 = 3.10^6 V.m^{-1}$, $\mu_0 = 4\pi.10^{-7} S.I$, $R = 2mm$.

$$P_{moy} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \times \frac{R^2 \pi}{2} = \frac{(3.10^6)^2}{4\pi.10^{-7} \times 3.10^8} \times \frac{(2.10^{-3})^2 \pi}{2} = \frac{9.10^{12}}{12.10^{8}} \times \frac{4.10^{-6}}{2}$$

$$= \frac{9 \times 4}{12 \times 2} = \cancel{\frac{3}{2}}\ 5\ W$$

3- Calculer la densité maximale d'énergie électromagnétique U_{max} du faisceau tel que $\varepsilon_0 = 9.10^{-12}$ S.I.

$$U = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

$$U_{max} = \frac{1}{2} 9.10^{-12} E^2 + \frac{1}{2 \times 4\pi.10^{-7}} B^2 = \frac{9}{2} .10^{5} E^2 + \frac{1}{8\pi} B^2 \quad ?$$

E ? B ?

Exercice 4 (Sur 5 points)

1- Définir l'état de polarisation d'une onde électromagnétique plane, progressive et sinusoïdale, en précisant les trois types de polarisation.

L'état de polarisation d'une OPPS EM c'est le mouvement que décrit l'extrémité de $\vec{E}$ au cours de la propagation. Il en existe 3 types : Rectiligne, Circulaire et Elliptique

1

2- Ecrire les composantes du champ électrique $\vec{E}$ d'une OEMPPS, de pulsation ω, de nombre d'onde k, qui se propage dans l'air avec les caractéristiques suivantes :

a) Propagation sur l'axe Ox et polarisation rectiligne selon Oy.

b) Propagation sur l'axe Oz et polarisation rectiligne à $\pi/6$ de l'axe Ox.

c) Propagation sur l'axe Oz et polarisation circulaire gauche.

a) $\vec{E} \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \cos(kx - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$ 1

b) $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos(kz - \omega t) \\ E_0 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$ 1

c) $\vec{E} : \begin{pmatrix} E_0 \cos(kz - \omega t) \\ E_0 \sin(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$ 1

3- Donner la direction de propagation, ainsi que l'état de polarisation de chacune des deux ondes, représentées par les champs électriques suivants.

a) $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \sin(\pi/3).\cos(k.y - \omega.t) \\ 0 \\ E_0 \cos(\pi/3).\cos(k.y - \omega.t) \end{pmatrix}$; **b)** $\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{0y} \cos(k.x - \omega.t) \\ E_{0z} \cos(k.x - \omega.t + \pi/2) \end{pmatrix}$ (Avec : $E_{0y} > E_{0z}$)

a) Onde se propageant sur l'axe Oy et polarisation rectiligne à $\frac{\pi}{3}$ de l'axe Oz 9r

b) Onde se propageant sur l'axe Ox et polarisation elliptique droite avec E_{0y} demi grand axe 9r.

Formulaire

1- *Troisièmeéquation de Maxwell :* $\vec{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

2- *Notation complexe :* $\vec{\nabla} = i\vec{k}$; $\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$

3- *Densité d'énergie électromagnétique* : $U = \frac{1}{2}\varepsilon_0.E^2 + \frac{1}{2\mu_0}.B^2$