EFREI-ESIGETEL 2014/2015 Nom : Bloquet Prénom : Romain Groupe : PL2.

18,5

BLOQUET Romain
PL2 - 2014

D.E de Propagation électr[...]

Les calculatrices et les d[...]

Réponses excl[...]

Exercice 1 (Sur 4 points)

Excellent travail !

18,5/20

On considère l'équation de propagation du champ électrique dans un milieu matériel quelconque donnée par : $\Delta\vec{E} - \mu.\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon}\vec{grad}(\rho) + \mu\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}$

1) Ecrire cette dans le milieu vide, **en fonction de la célérité c** des ondes électromagnétiques dans le vide. Cette équation est appelée **équation de D'Alembert**.

Dans le Vide, il n'y a pas de matière donc $\rho = 0$ et $\vec{J} = \vec{0}$.

De plus $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$

D'où $\boxed{\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2} * \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$ 1

2) On considère le champ électrique d'expression $\vec{E}(x,t) = E_0\cos(k.x - \omega.t).\vec{e}_z$

a) Exprimer le Laplacien de $\vec{E}$: $\Delta\vec{E}$ en fonction de $\vec{E}$.

$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = 0 \\ E_z = E_0\cos(kx - \omega t)\end{pmatrix}$ $\Delta\vec{E} = \begin{pmatrix}\Delta E_x \\ \Delta E_y \\ \Delta E_z\end{pmatrix}$

$\Delta\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}\end{pmatrix}$

Or $\vec{E_z}$ n'a qu'une composante en x.

d'où : $\Delta\vec{E_z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(E_0\cos(kx - \omega t)\right)\right).\vec{e_z}$ (*) $\Delta\vec{E_z} = -k E_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(\sin(kx - \omega t)\right)\vec{e_z}$

(*) $\Delta\vec{E_z} = -k^2 E_0\cos(kx - \omega t).\vec{e_z}$

$\boxed{\Delta\vec{E} = -k^2\vec{E}}$ 1

$(\vec{E_z} = \vec{E})$.

b) Exprimer $\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$ en fonction de $\vec{E}$

$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(E_0\cos(kx - \omega t)\right)\right).\vec{e_z}$

$= -\omega E_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\sin(kx - \omega t)\right).\vec{e_z}$

$= -\omega^2 E_0\cos(kx - \omega t).\vec{e_z}$ 1

$= \boxed{-\omega^2\vec{E}}$

c) En déduire une relation entre les constantes k, ω et c, sachant que ce champ éléctrique vérifie l'équation de D'Alembert obtenue dans la question (1).

d'après l'équation de D'Alembert

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

donc en remplaçant $\Delta\vec{E}$ et $\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$ on a : (1).

$$-k^2\vec{E} + \frac{1}{c^2}\omega^2\vec{E} = \vec{0}.$$

$$\vec{E}\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) = \vec{0}$$ d'où $\boxed{k = \frac{\omega}{c}}$ ou $\boxed{\omega = k * C.}$

Exercice 2 (Sur 6 points)

On considère une OPPS qui se propage dans l'air avec une célérité $c = 3.10^8$ m.s^{-1}, dont le champ électrique est donné par :

$$\vec{E}(x,y,t) = E_0\cos((k.\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{k}{2}y) - \omega.t).\vec{e}_z$$ (E_0, ω, et k sont des constantes positives).

1- Donner les composantes du vecteur d'onde $\vec{k}$ en fonction de k, en déduire la direction de propagation. Justifier votre.

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x = \frac{k\sqrt{3}}{2} \\ k_y = \frac{k}{2}. \\ k_z = 0 \end{pmatrix}$$

$k * \cos(\alpha) = k_x. = \frac{k\sqrt{3}}{2}$

$k * \sin(\alpha) = k_y. = \frac{k}{2}.$ (1)

$\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30° = \pi/6.$

Donc $\vec{E}(x,y,t)$ se propage a $\pi/6$ de l'axe $\vec{ox}$ (sur le plan (xoy)).

2- Calculer la longueur d'onde λ et la fréquence f sachant que $k = 2\pi$ rad.m^{-1}.

$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k}$ donc $\lambda = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ m.

(1)

$\omega = k.c$ et $\omega = 2\pi f.$ d'où $f = \frac{\omega}{2\pi}$

$= 2\pi \times 3.10^8.$

$= 6\pi.10^8$ rad/s. $= \frac{2\pi \times 3.10^8}{2\pi} = \boxed{3.10^8 \text{ Hz}}.$

3- Utiliser la troisième équation de Maxwell en notation complexe pour en déduire les composantes du vecteur champ magnétique. Calculer B_0 pour $E_0 = 10^3$ V.m^{-1}.

$\vec{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ or $\vec{rot}(\vec{E}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{E}$ et en notation complexe $\vec{\nabla} = i\vec{k}$, $\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$.

$i\vec{k} \wedge \vec{E} = -(-i\omega)\vec{B}$

$i\vec{k} \wedge \vec{E} = i\omega \vec{B}$

donc :

$\vec{B} = \frac{1}{\omega}(\vec{k} \wedge \vec{E})$

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega}\begin{pmatrix} \frac{k\sqrt{3}}{2} \\ \frac{k}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix}$$

2

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \times E_z \begin{pmatrix} \frac{k}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega}\begin{pmatrix} \frac{k}{2}E_z \\ -\frac{k\sqrt{3}}{2}E_z \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{or } \omega = kc.$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} \frac{E_z(x,y,t)}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}E_z(x,y,t) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{B} = \begin{cases} B_x = \frac{E_z}{2c} \\ B_y = -\frac{\sqrt{3}E_z}{2c} \\ B_z = 0 \end{cases}$$

D'après la propriété des opps. $E_0 = cB_0$.

donc $B_0 = \frac{E_0}{c} \Rightarrow B_0 = \frac{10^3}{3.10^8} \approx 3{,}33.10^{-6}$ Tesla.

4- Donner les composantes du vecteur de Poynting $\vec{S}$. Calculer son amplitude S_0 avec $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ S.I

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu} = \frac{1}{\mu}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{E_z}{2c} \\ -\frac{\sqrt{3}E_z}{2c} \\ 0 \end{pmatrix}$$

1,5

$$= \begin{pmatrix} S_x = +\frac{\sqrt{3}E_z^2}{\mu 2c} \\ S_y = -\frac{E_z^2}{\mu 2c} \\ S_z = 0 \end{pmatrix}$$

Pb de signe !

$S_0 = \sqrt{S_x^2 + S_y^2}$

$= \frac{E_0^2}{\mu_0 c}$

$= \frac{10^6}{4\pi.10^{-7} \times 3.10^8}$

$= \frac{1}{4\pi \times 3} \times 10^5 = \frac{1}{12\pi}.10^5$ W/m^2.

Exercice 3

(Sur 5 points)

Un faisceau laser composé d'OPPS, d'axe (Oz) et de rayon R se propage dans l'air avec une vitesse $c = 3.10^8 m.s^{-1}$.

1- Donner l'expression du vecteur de Poynting $\vec{S}(z,t)$ en utilisant les propriétés d'ondes planes dans l'air. Préciser l'expression de son amplitude S_0 en fonction de E_0, μ_0 et c.

$\vec{S}(z,t) = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu}$ $\qquad \vec{S}(z,t) = \frac{E . B \sin(\pi/2) . \vec{e_z}}{\mu}$ $\qquad \leftarrow \vec{E} \perp \vec{B}$.

$\vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t)\vec{u}$

$\vec{B} = B_0 \cos(kz - \omega t)\vec{u'}$.

$E_0 = cB_0$ donc $\boxed{\vec{S}(z,t) = \frac{E_0^2 \vec{e_z}}{c\mu_0}}$ $\cos^2(kz - \omega t)$

1,5

$S(z,t) = \underbrace{\frac{E_0^2 \cos^2(kz - \omega t)}{\mu_0}}$, $\qquad S_0 = S_{max}$ donc quand $\cos^2 = 1$.

$\boxed{S_0 = \frac{E_0^2}{c\mu_0}}$

2- a) Exprimer la puissance moyenne de rayonnement en fonction de E_0, μ_0, c et R.

$$P_{ray} = \iint_{\Sigma} \vec{S}\, d\vec{\Sigma} \qquad P_{ray} = \iint_{\Sigma} S_0\, d\Sigma \cdot \cos(\alpha)$$

surface de réception

$$= \iint_{\Sigma} S(z,t) \cdot r\,dr \cdot d\theta$$

$P_{ray\,moy}$

$$= S(z,t)\int_0^R r\,dr \int_0^{\pi} d\theta = S(z,t) \cdot \pi R^2$$

$$\langle P_{ray} \rangle = \frac{P_{max}}{2}$$

$$P_{max} = S_0 \times \pi R^2 \qquad \langle P_{ray} \rangle = \frac{S_0 \times \pi R^2}{2} = \boxed{\frac{E_0^2}{\mu_0 c \times 2} \pi R^2}$$

1,5

b) Faire le calcul pour $E_0 = 3.10^6 V.m^{-1}$, $\mu_0 = 4\pi.10^{-7} S.I$, $R = 2mm$.

$P_{ray\,moy}$

$$\langle P_{ray} \rangle = \frac{(3.10^6)^2 * \pi * (2.10^{-3})^2}{4\pi.10^{-7} \cdot 2 \cdot 3.10^8} = \frac{9.10^{12} * 4.10^{-6}}{24.10} = \frac{36}{24}.10^5 = 9/6 = \frac{3}{2}$$

$$\simeq 0,1.10^5 \text{ J}.$$

$$\boxed{\simeq \cancel{10} \text{ kW}.}$$

3- Calculer la densité maximale d'énergie électromagnétique U_{max} du faisceau tel que $\varepsilon_0 = 9.10^{-12}$ S.I.

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} \qquad \text{or } w_e = w_m.$$

donc $u = \varepsilon_0 E^2$ $\qquad E_{max} = E_0.$

1

$$u = \varepsilon_0 E_0^2$$

$$= 9.10^{-12} \times (3.10^6)^2 \Rightarrow \boxed{u = 81\ J/m^3}$$

Exercice 4 (Sur 5 points)

1- Définir l'état de polarisation d'une onde électromagnétique plane, progressive et sinusoïdale, en précisant les trois types de polarisation.

La polarisation d'une OEMPPS, est ce que décrit le vecteur $\vec{E}$ lors de la propagation. Il y a trois type de polarisation : Rectiligne, circulaire et elliptique.

1

Rectiligne :	Circulaire :	Elliptique :
une seule composante, ex: $\vec{E}(z,t) = E_0\cos(kz-\omega t).\vec{e_y}$ l'onde se propage sur l'axe $\vec{Oz}$ et est polarisée rectilignement ~~horizontalement~~ par $\vec{Oy}$.	Deux composantes. ex: $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0\cos(kz-\omega t) \\ E_0\cos(kz-\omega t+\pi/2) \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{E}$ se propage sur $\vec{Oz}$ et est polarisé circulaire Gauche dans le plan (xOy).	2 composantes même chose sauf que l'amplitude du petit rayon est différent de celui du grand.

2- Ecrire les composantes du champ électrique $\vec{E}$ d'une OEMPPS, de pulsation ω, de nombre d'onde k, qui se propage dans l'air avec les caractéristiques suivantes :

a) Propagation sur l'axe Ox et polarisation rectiligne selon Oy.

b) Propagation sur l'axe Oz et polarisation rectiligne à $\pi/6$ de l'axe Ox.

c) Propagation sur l'axe Oz et polarisation circulaire gauche.

a). $\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \cos(kx - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{E}(x,t) = E_0 \cos(kx - \omega t) \cdot \vec{e_y}$. 1.

b). $\vec{E} = \begin{pmatrix} \overbrace{E_0 \cos(\pi/6)}^{E_{0x}} \cos(kz - \omega t) \\ \underbrace{E_0 \sin(\pi/6)}_{E_{0y}} \cos(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}}$ 1.

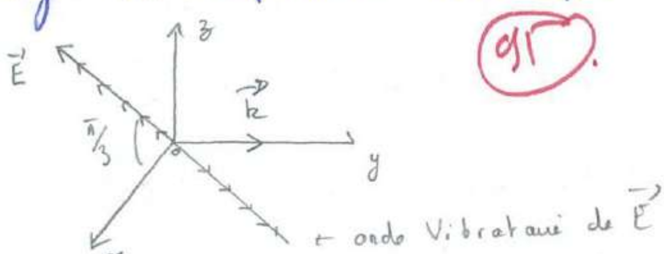
c). $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \cos(kz - \omega t) \\ -E_0 \sin(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$ ou 1 $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \cos(kz - \omega t) \\ E_0 \cos(kz - \omega t + \pi/2) \\ 0 \end{pmatrix}$

car $-\sin(\alpha) = \cos(\alpha + \pi/2)$.

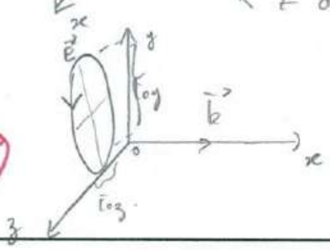
3- Donner la direction de propagation, ainsi que l'état de polarisation de chacune des deux ondes, représentées par les champs électriques suivants.

a) $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \sin(\pi/3).\cos(k.y - \omega.t) \\ 0 \\ E_0 \cos(\pi/3).\cos(k.y - \omega.t) \end{pmatrix}$ car $\vec{E}$ transverse ; **b)** $\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{0y} \cos(k.x - \omega.t) \\ E_{0z} \cos(k.x - \omega.t + \pi/2) \end{pmatrix}$ (Avec : $E_{0y} > E_{0z}$)

a). $\vec{E}$ se propage sur l'axe Oy ~~est~~ et polarisé rectilignement a $\pi/3$ de l'axe Ox. 0.5.



b). $\vec{E}$ se propage sur Ox et est polarisée en décrivant une ellipse, gauche. avec le petit rayon sur z. 0.5



T.B !

Formulaire

1- ***Troisièmeéquation de Maxwell :*** $\vec{rot}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

2- ***Notation complexe :*** $\vec{\nabla} = i\vec{k}$; $\dfrac{\partial}{\partial t} = -i\omega$

3- ***Densité d'énergie électromagnétique :*** $U = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0.E^2 + \dfrac{1}{2\mu_0}.B^2$