EFREI-ESIGETEL 2015/2016 Nom : MEFTAH Prénom : Kamel Groupe : A

MEFTAH Kamel
L2 - 2015

16,

D.E de Propagation électi

Les calculatrices et le

Réponses e.

16/20 TB

Exercice 1 Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes (Sur 6 points)

1- On considère le vecteur force $\vec{F}$ définit par : $\vec{F} = \begin{pmatrix} k(y.z - 2.x.y) \\ k(x.z - x^2) \\ k.x.y \end{pmatrix}$; Où k est une constante.

a) Exprimer $div(\vec{F})$.

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} kyz - 2kxy = F_x \\ kxz - kx^2 = F_y \\ kxy = F_z \end{pmatrix} \quad div(\vec{F}) = \vec{\nabla}.\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

1

$$div(\vec{F}) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = -2ky + 0 + 0 = \boxed{-2ky}.$$

b) Montrer que $\vec{rot}(\vec{F})$ est nul.

$$\vec{rot}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} F_y \\ \frac{\partial}{\partial z} F_x - \frac{\partial}{\partial x} F_z \\ \frac{\partial}{\partial x} F_y - \frac{\partial}{\partial y} F_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx - kx = 0 \\ ky - ky = 0 \\ \underbrace{kz - kz = 0}_{= (kz - 2kx) - (kz - 2kx)} \end{pmatrix}$$

1,5

$$\boxed{\vec{rot}(\vec{F}) = \vec{0}}$$

2- Montrer l'identité remarquable suivante :

$div(f\vec{V}) = f div(\vec{V}) + \vec{V}.\vec{grad}(f)$; où f est une fonction de trois variables (x,y,z).

$$div(f.\vec{V}) = \vec{\nabla}.(f.\vec{V}) = \frac{\partial}{\partial x} f.V_x + \frac{\partial}{\partial y} f.V_y + \frac{\partial}{\partial z} f.V_z.$$

1

$$= \left(V_x \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial V_x}{\partial x}\right) + \left(V_y \frac{\partial f}{\partial y} + f \frac{\partial V_y}{\partial y}\right) + \left(\vec{V} \frac{\partial f}{\partial z} + f \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}\right)$$

selon la formule de la dérivé d'un produit : $(uv)' = u'v + uv'$

$$= f \underbrace{\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right)}_{= div(\vec{V})} + \vec{V} \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\right)}_{= \vec{grad}(f)}$$

Donc $div(f.\vec{V}) = f div(\vec{V}) + \vec{V}.\vec{grad}(f)$

$$\boxed{div(f.\vec{V}) = f\,div(\vec{V}) + f\,\vec{grad}(f)}$$

3- Montrer que $\vec{rot}(\vec{grad}(f)) = \vec{0}$, pour une fonction f(x,y,z) différentielle totale exacte.

$$\vec{rot}(\vec{grad}(f)) = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla}.f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

1

$$\vec{rot}(\vec{grad}(f)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \ (1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \ (2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \ (3) \end{pmatrix}$$

or $f(x,y,z)$ est une fonction différentielle totale exacte donc on a :

$(1) = (2) = (3) = 0$

donc $\boxed{\vec{rot}(\vec{grad}(f)) = \vec{0}}$

Exercice 2 (7 points)

Le champ électrique d'une onde radio (considérée comme OPPS), qui se propage dans l'air avec une célérité c = 3.10^8m.s^{-1} est $\vec{E}(x,y,t) = 2.10^3 \cos(5\pi\sqrt{2}.x + 5\pi\sqrt{2}.y) - \omega.t)\vec{e}_z$.

1- Donner les composantes du vecteur d'onde $\vec{k}$, en déduire la direction de propagation. Justifier votre réponse en représentant la droite (D) de propagation.

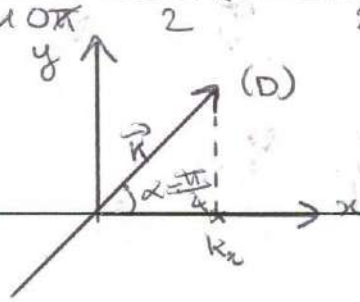
$\vec{K}\begin{pmatrix} 5\pi\sqrt{2} \\ 5\pi\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ L'onde se propage sur le plan (xOy) à un angle α de l'axe $\vec{Ox}$, elle a le même sens et la même direction que $\vec{K}$.

Calculons α :

$K = \sqrt{(5\pi\sqrt{2})^2 + (5\pi\sqrt{2})^2} = \sqrt{100\pi^2} = 10\pi$

Donc $\cos(\alpha) = \frac{K_x}{K} = \frac{5\pi\sqrt{2}}{10\pi} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 1

d'où $\alpha = \frac{\pi}{4}$.



2- Calculer la norme du vecteur d'onde $\vec{k}$, en déduire la longueur d'onde λ et la fréquence f.

$K = 10\pi$ On sait aussi que $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ donc $\lambda = \frac{2\pi}{k}$

$\lambda = \frac{2\pi}{10\pi} = \frac{1}{5} = 0{,}2 \text{ m} = 2{,}0 \cdot 10^{-1} \text{ m}$ 2

$\lambda = \frac{c}{f}$ donc $f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3{,}0 \cdot 10^8}{2{,}0 \cdot 10^{-1}} = 1{,}5 \cdot 10^9 \text{ Hz}$

$f = 1{,}5 \text{ GHz}$.

3- Utiliser la troisième équation de Maxwell en notation complexe pour exprimer les composantes du vecteur champ magnétique $\vec{B}$. Calculer son amplitude B_0.

$\vec{K} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}$ $\quad \vec{K}\begin{pmatrix} 5\pi\sqrt{2} \\ 5\pi\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{E}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix}$

$\omega \vec{B} = \begin{pmatrix} 5\pi\sqrt{2}\, E_z \\ -5\pi\sqrt{2}\, E_z \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{B}\begin{pmatrix} \frac{5\pi\sqrt{2}}{\omega} E_z \\ -\frac{5\pi\sqrt{2}}{\omega} E_z \\ 0 \end{pmatrix}$ 1

$\vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2c} E_z \\ -\frac{\sqrt{2}}{2c} E_z \\ 0 \end{pmatrix}$

$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{2 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8} = \boxed{1{,}5 \cdot 10^{-5} \text{ T}}$ $\quad \frac{2}{3} = 0{,}67$.

4- Donner les composantes de $\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$, calculer son amplitude S_0. On donne $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\, S.I.$

$\vec{E} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{1}{c} E_z \\ -\frac{1}{c} E_z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} E_z^2 \\ \frac{1}{c} E_z^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 1

$\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2\mu_0 c} E_z^2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2\mu_0 c} E_z^2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$S_0 = \frac{1}{\mu_0 c} E_0^2 = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7} \times 3{,}0 \cdot 10^8} \times (2 \cdot 10^3)^2$, W m^{-2}.

$= \frac{1}{360} \times 2000 = \frac{200}{36} = \cancel{\frac{50}{9}} \simeq \cancel{5 \text{ J m}^{-1}}$

Exercice 3 (Sur 7 points)

Un faisceau laser d'axe (Oz), de rayon R, formé d'ondes électromagnétiques planes, progressives et sinusoïdales se propage dans l'air avec une vitesse $c = 3.10^8$ m.s^{-1}.

1- Calculer la longueur d'onde λ et la fréquence f, sachant que $k = 2\pi.10^7$rad.m^{-1}.

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ donc } \lambda = \frac{2\pi}{K} = \frac{2\pi}{2\pi.10^7} = \frac{1}{10^7} = 10^{-7} \text{ m.}$$

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3{,}0.10^8}{10^{-7}} = 3{,}0.10^{15} \text{ Hz} = 3{,}0.10^6 \text{ GHz}$$

1

2- Ecrire le vecteur champ électrique $\vec{E}(z,t)$ sachant qu'il est sur l'axe (Ox) vers les x > 0 et l'onde se propage sur l'axe (Oz) vers les z > 0.

$$\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(k_z z - \omega t).\vec{e_x}$$

$$\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(2\pi 10^7 z - \omega t).\vec{e_x}$$

1

k n'a qu'une seule composante k_z donc $k = k_z = 2\pi.10^7$

3- Utiliser la troisième équation de Maxwell en notation complexe pour en déduire l'expression du champ magnétique $\vec{B}(z,t)$. Calculer B_0, on donne $E_0 = 10^6 V.m^{-1}$.

$$\vec{K} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B} \qquad \vec{K}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \qquad \vec{E}\begin{pmatrix} Ex \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\omega \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ K\,Ex \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{B}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k}{\omega} Ex \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Or } \frac{k}{\omega} = \frac{1}{c}$$

$$\text{donc } \vec{B}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{c} Ex \\ 0 \end{pmatrix}$$

1

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{10^6}{3{,}0.10^8} = 3{,}0.10^{-3} \text{ T}$$

4- Calculer la densité maximale d'énergie électromagnétique U_{max}. On donne $\varepsilon_0 = 9.10^{-12}$ $S.I$

1

$$U_{max} = \varepsilon_0 E_0^2 = 9.10^{-12} \times 10^{12}$$

$$= 9 \times 1 = 9 \text{ Jm}^{-3}$$

5- Donner les composantes du vecteur de Poynting $\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$, préciser l'expression de son amplitude S_0 en fonction de E_0, μ_0 et c. Calculer S_0 avec $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\, S.I.$

$\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ $\vec{E} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{c} E_x^2 \end{pmatrix}$ donc $\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\mu_0 c} E_x^2 \end{pmatrix}$

Il s'agit d'une OPPS qui se propage dans l'air donc :

$E = cB$ / $B = \frac{E}{c}$ $\vec{E} \wedge \vec{B} = E \times B \times \sin(\vec{E}, \vec{B}) = E \times B \times 1 = E \times B = \frac{E^2}{c}$

$\vec{S} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{u}$ donc $S_0 = \frac{1}{\mu_0 c} E_0^2 = \frac{10^{12}}{3{,}6.10^2} = 2{,}5.10^9$

1

6- a- Exprimer la puissance de rayonnement de ce laser $P_{ui} = \oiint_\Sigma \vec{S}.d\vec{\Sigma}$

$P_{ui} = \frac{1}{\mu_0 c} E^2 \times \underbrace{\oiint_\Sigma d\vec{\Sigma}}_{= \Sigma_{disque} = \pi R^2}$

$P_{ui} = \frac{\pi R^2}{\mu_0 c} E_0^2 \cos^2(kz - \omega t)$

1

b- En déduire la puissance moyenne en fonction de μ_0, c, E_0 et de R.

$P_{moy} = \langle P_{ui} \rangle_T = \frac{\pi R^2}{\mu_0 c} E_0^2 \underbrace{\langle \cos^2(kz - \omega t) \rangle_T}_{= \frac{1}{2}}$

$P_{moy} = \frac{E_0^2 \pi R^2}{2 \mu_0 c}$

0,5

c- Calculer le rayon du laser R pour une puissance moyenne de 10^5 Watts.

$P_{moy} = \frac{E_0^2 \pi R^2}{2 \mu_0 c} = 10^5$

$\Rightarrow R = \sqrt{\frac{2 \mu_0 c . 10^5}{E_0^2 \pi}}$

$R = \cancel{2{,}4.10^{-8}}$ m

Formulaire

1- ***Troisièmeéquation de Maxwell :*** $\vec{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

2- ***Notation complexe*** **:** $\vec{\nabla} = i\vec{k}$; $\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$

3- ***Densité d'énergie électromagnétique*** **:** $U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 . E^2 + \frac{1}{2\mu_0} . B^2$