EFREI – L2 - DE Propagation de l'information
2h - calculatrices non autorisées

LE GUIDE D'ONDE

On considère deux plans métalliques infinis et parfaitement conducteurs situés en $y=0$ et $y=a$. On étudie la propagation d'une onde électromagnétique entre ces deux plans.
La pulsation de l'onde est notée ω, son vecteur d'onde $\vec{k}$.
L'onde se propage suivant la direction Ox.
On rappelle que le champ électrique s'annule à la surface d'un conducteur.
Le champ électrique associé à cette onde est supposé de la forme suivante :
$\vec{E}=F(y)\cos(\omega t-kx)\vec{u}_z$

1) Compte tenu de la géométrie du problème, expliquer la forme choisie pour ce champ électrique. Proposer une forme alternative réaliste pour le champ électrique.

Le champ se propage entre les plaques suivant l'axe 0x (terme en –kx). Comme le champ s'annule à la surface du conducteur, son amplitude ne peut pas être uniforme suivant y, la fonction F(y) en décrit les variations. Le sens de propagation de l'onde indiquée est vers les x croissants (terme en -kx), on aurait pu choisir une onde se propageant en sens inverse, dans ce cas, le terme de propagation devient +kx.

2) Ecrire en toute généralité l'équation de propagation à trois dimensions pour une onde électromagnétique.

$$\frac{d^2\vec{E}}{dx^2}+\frac{d^2\vec{E}}{dy^2}+\frac{d^2\vec{E}}{dz^2}-\frac{1}{c^2}\frac{d^2\vec{E}}{dt^2}=0$$

3) On s'intéresse à la projection sur Oz de l'équation de propagation. Expliquer pourquoi et montrer qu'elle peut s'écrire ici : $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\left(\frac{\omega^2}{c^2}-k^2\right)F=0$

Le champ n'a pas de composante suivant Ox et Oy, il ne reste donc que les variations de la composante du champ suivant Oz. L'équation vectorielle devient donc une équation scalaire pour la composante Ez : $E_z=F(y)\cos(\omega t-kx)$
On remplace Ez par son expression dans l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2(F(y)\cos(\omega t-kx))}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(F(y)\cos(\omega t-kx))}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(F(y)\cos(\omega t-kx))}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2(F(y)\cos(\omega t-kx))}{\partial t^2}=0$$

et on calcule les différentes dérivées :

$$-k^2F(y)\cos(\omega t-kx)+\frac{\partial^2 F(y)}{\partial y^2}\cos(\omega t-kx)+0-\frac{\omega^2}{c^2}F(y)\cos(\omega t-kx)=0$$

$\cos(\omega t-kx)$ est en facteur de tous les termes, or cette équation doit être identiquement nulle, on peut donc l'éliminer. Après factorisation reste l'expression voulue.

4) Montrer que si $\frac{\omega^2}{c^2}-k^2=0$ cette équation différentielle admet une solution linéaire pour $F(y)$.

Dans ce cas, l'expression devient : $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=0$, en intégrant deux fois on obtient une fonction de la forme $F(y)=ay+b$

5) Montrer que $\frac{\omega^2}{c^2}-k^2<0$ cette équation différentielle admet une solution exponentielle pour $F(y)$.

$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \gamma^2 F$. La fonction exponentielle $F(y) = \exp(\gamma y)$ vérifie bien cette équation (calculer les dérivées).

6) La géométrie du problème impose des conditions aux limites $F(0)=F(a)=0$. Expliquer pourquoi et montrer que les deux situations précédentes (4) et (5) ne sont pas physiquement acceptables.

Ces deux fonctions tendent vers l'infini avec y. Or la présence des plans métalliques en y=0 et y=a impose une valeur nulle pour le champ en y=0 et a. Ce n'est possible que si ces fonctions sont identiquement nulle, ce qui n'est pas une solution très intéressante ! (il n'y a pas de champ)

7) Montrer que si $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 > 0$ cette équation différentielle admet des solutions sinusoïdales.

Dans ce cas, l'équation s'écrit : $\frac{\P^2 F}{\P y^2} = - g^2 F$. Une fonction sinusoïdale dérivée deux fois est bien égale à elle même moyennant un changement de signe : prendre cos(γy) et la dériver 2 fois pour vérifier .

8) Expliquer pourquoi une forme sinusoïdale $F(y) = E_0 \sin(Ly + j)$ est physiquement acceptable.

Cette fonction peut s'annuler en y=0 et y=a grâce au choix de la phase et de sa longueur caractéristique de variation 1/Λ.

9) En tenant compte des conditions aux limites, déterminer les valeurs possibles pour L et j .

On écrit la valeur de F en y=0 et en y=a :

$F(0) = 0 = E_0 \sin(j)$, ce qui implique que $j = 0$

$F(a) = 0 = E_0 \sin(La)$, ce qui implique $L = \frac{np}{a}$ ave n un entier quelconque.

10) Finalement montrer que le champ électrique s'écrit : $\vec{E} = E_0 \sin(n\pi \frac{y}{a}) \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z$ où n est un entier quelconque.

Immédiat d'après la question 9 et les données du problème (fonction donnée en intro pour E).

11) En explicitant le champ électrique dans l'équation de propagation, écrire la relation qui relie le vecteur d'onde et la pulsation (remarque : cette équation s'appelle la relation de dispersion car elle permet d'établir que la vitesse de propagation de l'onde dans ce système varie avec la pulsation).

En dérivant tous les termes dans l'équation de propagation et en factorisant

$E_0 \sin(np \frac{y}{a}) \cos(wt - kx)$, on obtient :

$$\left(-k^2 - \left(\frac{np}{a} \right)^2 + \frac{w^2}{c^2} \right) E_0 \sin(np \frac{y}{a}) \cos(wt - kx) = 0$$

soit $\frac{w^2}{c^2} = k^2 - \left(\frac{np}{a} \right)^2$ qui est la relation de dispersion.

La vitesse de propagation de l'énergie électromagnétique et donc de l'information dans le guide d'onde est la vitesse de groupe définie comme suit : $v_g = \frac{dw}{dk}$

12) Calculer la vitesse de groupe et montrer qu'elle est toujours inférieure à c.

En dérivant l'expression de ω, on trouve :

$$\frac{d\omega}{dk} = c\frac{k}{\sqrt{k^2 + (n\frac{p}{a})^2}} < c$$

13) On posera $\omega_c = \frac{\pi c}{a}$ qu'on appelle pulsation de coupure, expliquer ce terme. Quelle pulsation minimale doit avoir une onde pour se propager ?

On peut réécrire la relation de dispersion sous la forme : $\omega^2 - n\omega_c^2 = k^2 c^2$

Ceci n'est vérifiable que si $\omega^2 > \omega_c^2$ Ce qui signifie que en dessous de la pulsation de coupure, aucune onde se pourra se propager entre les plaques.