

EFREI 2011/2012 L3

Aide à la Décision Résolution par contraintes

Support de cours



Cours « Aide à la Décision »
EFREI – 2011/2012 – L3

© Hervé BARBOT, 2005-2012 – www.proactitude.com

Crypt-arithmétique

« DONALD + GERALD = ROBERT »

Par quel chiffre faut-il remplacer chaque lettre

- à chaque lettre un chiffre

- à chaque chiffre une lettre

pour que l'expression mathématique soit correcte ?

Formalisation du problème :

$D = ? , O = ? , N = ? \dots$

$D + D = T + 10 \times C_1$

$C_1 + L + L = R + 10 \times C_2$

...

$D \neq O \neq N \neq \dots$

$D, O, N, \dots \in [0..9]$

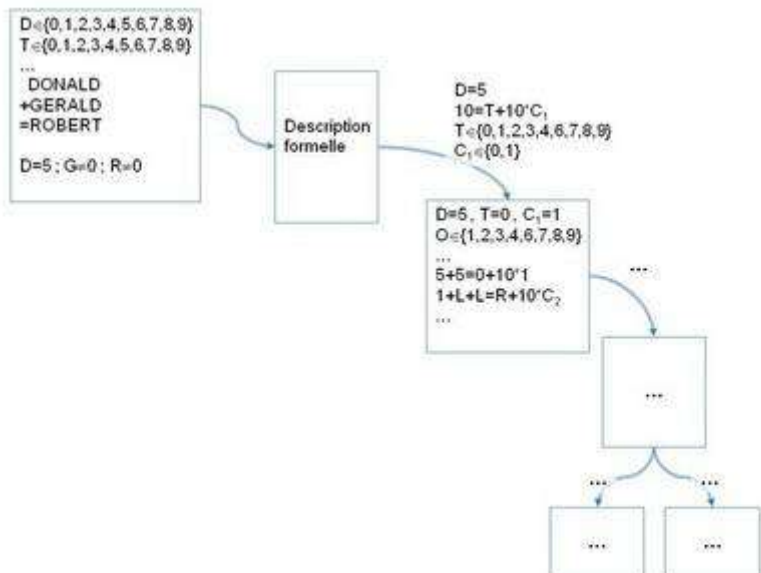
$C_1, C_2, \dots \in [0..1]$

...

C_5	C_4	C_3	C_2	C_1	
D	O	N	A	L	D
G	E	R	A	L	D
R	0	B	E	R	T

(C) Hervé Barbot, 2005-2012

3



(C) Hervé Barbot, 2005-2012

4

Résolution intuitive :

Arbre de recherche :

Racine : connaissance initiale

Une branche = un ensemble d'affectation *variable=valeur*

Relation nœud / fils :

Prise de décision (certitude)

Hypothèse (incertitude)

Solution : une branche telle qu'en sa feuille, toutes les variables sont affectées

Algorithme de recherche dans un espace d'états :

Complexité ?

b = plus les domaines de valeurs sont grands,
plus il y a de choix en cas d'hypothèse

m = plus il y a de variables,
plus il faudra faire de choix avant une réponse complète

d = m

Stratégie ?

On cherche une « feuille » ; toutes les branches « gagnantes » auront la même profondeur ; donc a priori parcours en profondeur d'abord

(C) Hervé Barbot, 2005-2012

5

Donc :

- La démarche est correcte mais :
 - La complexité de l'arbre croît avec le nombre de variables et le nombre de valeurs possibles
- Idée :
 - Propager les informations liées aux placements précédents
 - C'est-à-dire liées à la partie supérieure d'une branche
 - pour éviter les situations d'échec au plus tôt
 - Donc éliminer des branches de l'arbre de recherche
- Représentation explicite des contraintes
Algorithmes de manipulation de contraintes

(C) Hervé Barbot, 2005-2012

6

FORMALISATION

(C) Hervé Barbot, 2005-2012

7

PSC : Problème à Satisfaction de Contraintes

- Un ensemble de variables $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
 - Chaque variable a un domaine de valeurs possibles D_i discrets et finis
- Un ensemble de contraintes $\{c_1, c_2, \dots, c_p\}$
 - Chaque contrainte concerne un sous-ensemble de variables
 - Chaque contrainte spécifie les combinaisons autorisées pour les valeurs des variables concernées
- Objectif : assignation complète de valeurs aux n variables tout en satisfaisant les p contraintes.

(C) Hervé Barbot, 2005-2012

8

Exemple de crypt-arithmétique

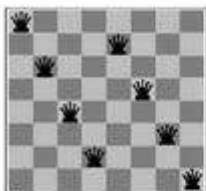
VARIABLES	Domaines de valeur
D	D=5
O, N, A, L, E, B, T	{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9}
G, R	{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9}
C ₁ , ..., C ₅	{0, 1}

CONTRAINTES
$D + D = T + 10 \cdot C_1$
$C_1 + L + L = R + 10 \cdot C_2$
...
$C_5 + D + G = R$
$D \neq O$
$D \neq N$
...
...
$B \neq T$

(C) Hervé Barbot, 2005-2012

9

Exemple



Problème des 8 reines

Comment placer 8 reines sur un échiquier de façon à ce que :

- Toutes les cases laissées libres soient mises en échec par au moins une reine
- Aucune reine ne met une autre reine en échec

Il n'y a pas qu'une seule solution !

(C) Hervé Barbot, 2005-2012

10

Exemple

■ Problème de coloration de carte

- Quelle couleur associer à chaque région de façon à ce que deux régions adjacentes n'aient pas la même couleur ?



(C) Hervé Barbot, 2005-2012

11

GRAPHE DE CONTRAINTES

(C) Hervé Barbot, 2005-2012

12

Graphe de contraintes

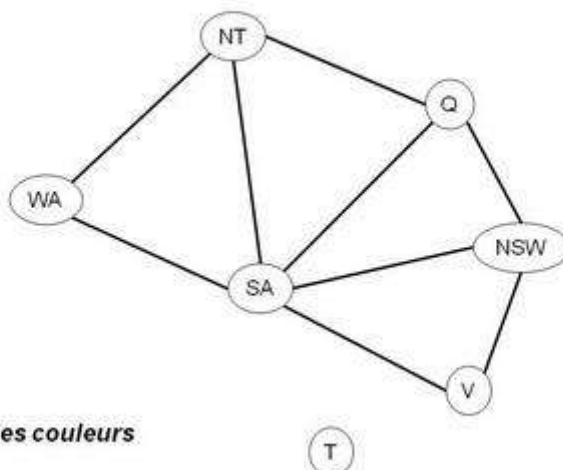
- Nœuds = variables
Arcs / arêtes = contraintes
- PSC binaire :
chaque contrainte concerne au plus 2 variables
- Plus généralement :
 - Contraintes unaires
 - Contraintes binaires
 - Contraintes n-aires ($n > 2$)
- Préférences (« contraintes molles »)
 - Coût / poids associé à chaque affectation possible

(C) Hervé Barbot, 2005-2012

13

Contraintes : « $X \neq Y$ » ...

donc ici la relation est symétrique, donc graphe non orienté



Problème des couleurs

(C) Hervé Barbot, 2005-2012

14

ARBRE DE RECHERCHE

(C) Hervé Barbot, 2005-2012

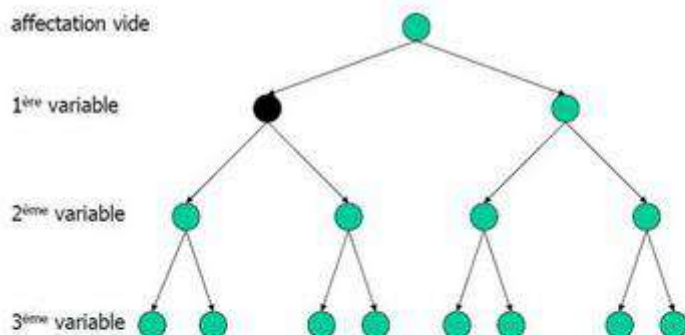
15

Algorithme de recherche – Arbre de recherche

- Etat initial = aucune affectation
- Fonction « successeur » = affectation d'une valeur à une variable
 - Affectation impossible à partir d'un nœud de l'arbre
 - ==> retour en arrière
 - Annulation d'une ou plusieurs affectations
 - Analyse d'une autre branche de l'arbre de recherche
- Test solution = affectation complète tout en respectant l'ensemble des contraintes

(C) Hervé Barbot, 2005-2012

16



(C) Hervé Barbot, 2005-2012

17

Affectation complète

= une solution au problème

- Branche de l'arbre = ordre d'affectation des variables
- Feuille de l'arbre = ensemble des valeurs
 - ou ensemble partiel d'affectations et impossibilité de donner des valeurs à d'autres variables

Seule la feuille compte, peu importe le chemin !

Contrairement aux techniques de « recherche dans un espace d'états »

(C) Hervé Barbot, 2005-2012

18

Impact de la formalisation

▪ Identifier / définir les variables et les contraintes

- La profondeur de l'arbre de recherche augmente avec le nombre de variables
- La complexité et le temps de calcul nécessaire augmente avec le nombre (et la complexité) des contraintes

Deux réalités sans doute opposées...

(C) Hervé Barbot, 2005-2012

19

Algorithme de recherche

affectation PSC (affectation A)

A est complet \Rightarrow retourner A

Soit :

X \leftarrow variable non assignée

D \leftarrow domaine ordonné des valeurs pour X

$\forall v \in D, v$ consistante avec A,

A' \leftarrow PSC (A + { X=v })

A' \neq échec \Rightarrow retourner A'

retourner échec

(C) Hervé Barbot, 2005-2012

20

Questions

- **Ordre de prise en compte des variables ?**
 - **Choix de la variable pour laquelle une valeur est choisie à chaque niveau de l'arbre**
 - Variable la plus contrainte
 - Le plus petit nombre de valeurs possibles
 - réduction du facteur de branchement
 - Variable la plus contraignante
 - Celle impliquée dans le plus de contraintes portant sur des variables non assignées
 - Minimiser le nombre de valeurs restantes possibles
 - Valeur la moins contraignante
 - Celle qui laisse le plus de valeurs possibles pour les variables non assignées
 - Pas nécessairement le même dans toutes les branches...
- **Ordre du domaine de valeurs d'une variable ?**
 - **Ordre de parcours des différentes branches sous un nœud de l'arbre de recherche**

(C) Hervé Barbot, 2005-2012

21

Questions

- **Ordre de prise en compte des variables ?**
- **Ordre du domaine de valeurs d'une variable ?**
- **Anticipation d'un échec inévitable ?**
 - ... « élagage »
- **Impact de la structure du problème sur l'algorithme de recherche ?**
- **Conséquences de l'affectation d'une variable sur celles non assignées ?**

(C) Hervé Barbot, 2005-2012

22

Exercice : Problème de coloriage



Construction de l'arbre de recherche

- jusqu'à trouver une solution,
- en se fixant a priori une stratégie de choix de variable / de valeur.

(C) Hervé Barbot, 2005-2012

23

PROPAGATION DE CONTRAINTES

(C) Hervé Barbot, 2005-2012

24

- Comment les valeurs possibles pour une variable donnée peuvent-elles influencer les valeurs possibles pour les autres ?

- Un choix d'affectation ne va-t-il pas fatalement entraîner une situation d'échec ?

Et si on le sait, pourquoi continuer ?

(C) Hervé Barbot, 2005-2012

25

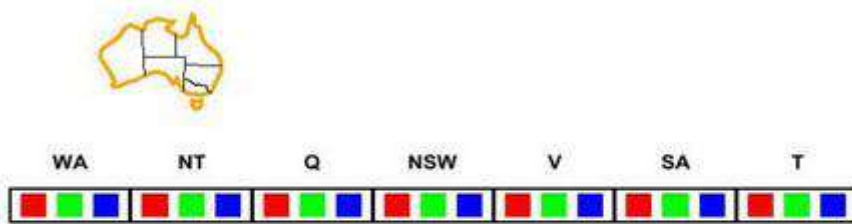
« Forward checking »

- Après chaque assignation de valeur à une variable X:
 - Examiner chaque variable Y non assignée ayant au moins une contrainte avec X
 - Supprimer du domaine de valeurs de Y toute valeur inconsistante avec celle de X

- Arrêt si une variable n'a plus de valeurs

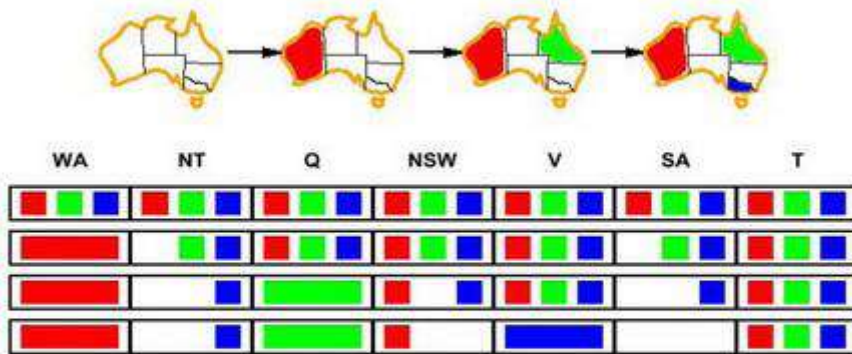
(C) Hervé Barbot, 2005-2012

26



(C) Hervé Barbot, 2005-2012

27

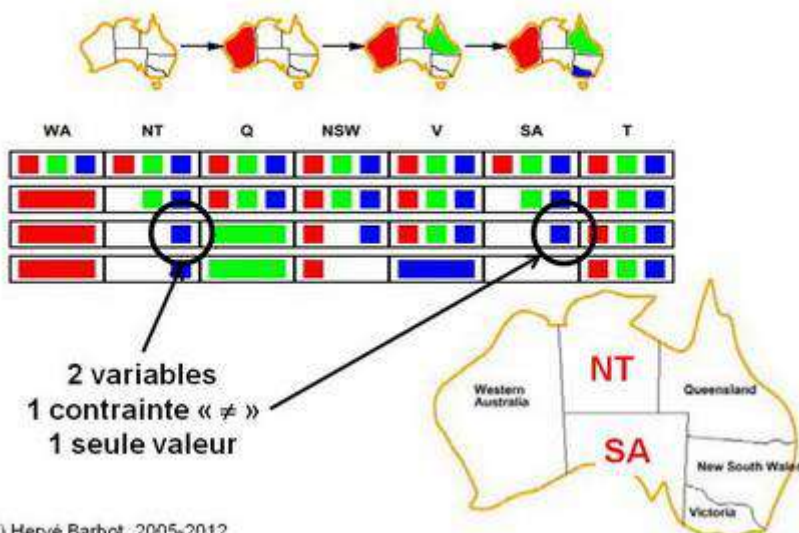


Domaine de valeurs (SA) = { } !

(C) Hervé Barbot, 2005-2012

28

Mais l'impossibilité pouvait être détectée plus tôt...



(C) Hervé Barbot, 2005-2012

29

COHÉRENCE D'ARÊTE

ALGORITHME « AC3 »

(C) Hervé Barbot, 2005-2012

30

Cohérence d'arête

- Soit une arête (c-à-d une contrainte) entre 2 variables X et Y
- Cohérence si :
pour toute valeur possible pour X, il reste au moins une valeur possible pour Y

(C) Hervé Barbot, 2005-2012

31

« AC3 » et contraintes binaires

bool éliminerIncohérences (X , Y)

éliminé ← faux

pour chaque valeur y du domaine de Y

si il n'existe pas de valeur x du domaine de X
telle que les contraintes (X,Y) soient satisfaites

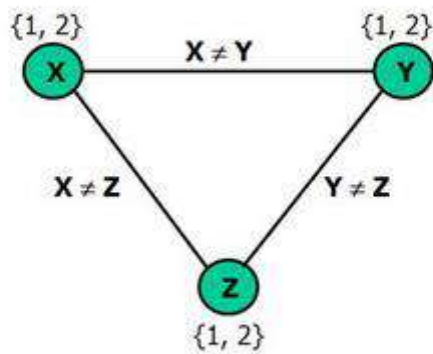
alors éliminer y du domaine de Y
éliminé ← vrai
si domaine de Y vide
alors contradiction ← vrai

retourner éliminé

(C) Hervé Barbot, 2005-2012

32

▪ Suffisant ?...



Il n'y a pas d' « incohérence d'arête » !

(C) Hervé Barbot, 2005-2012

33

▪ Besoin de mélanger les différentes techniques :

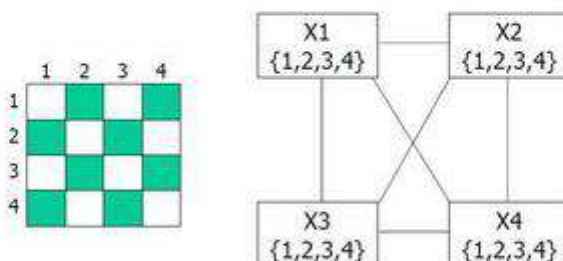
- Forward checking
- AC3
- Backtracking

(C) Hervé Barbot, 2005-2012

34

Exemple des « 4 reines »

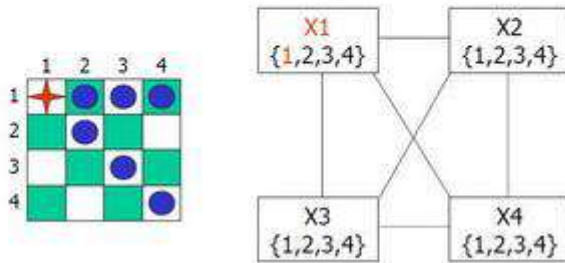
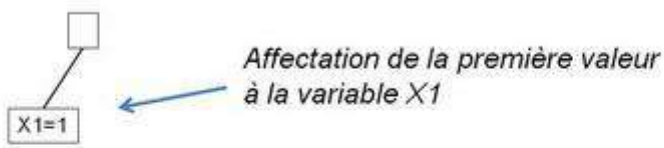
1 variable par colonne
Valeurs possibles : n° ligne



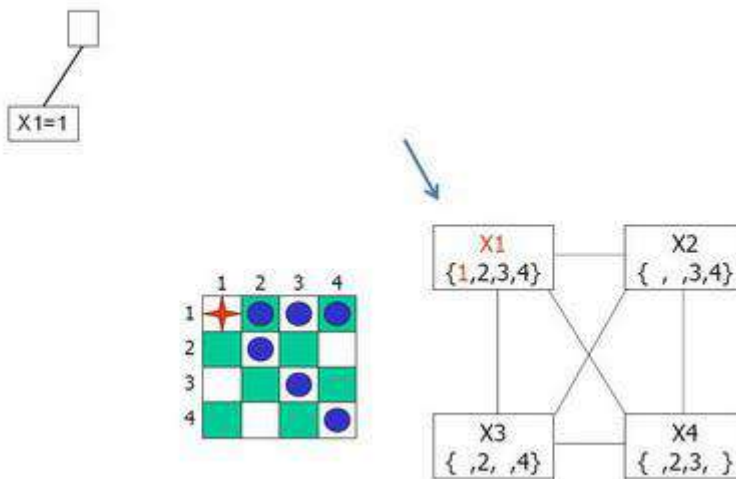
AC3 ne réduit pas les domaines de valeur

(C) Hervé Barbot, 2005-2012

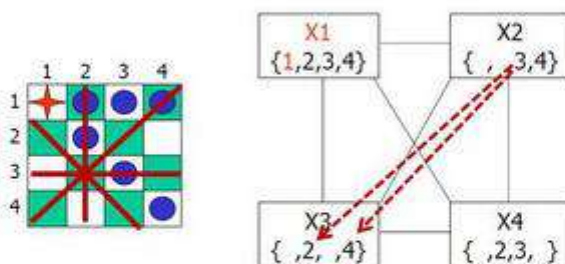
35



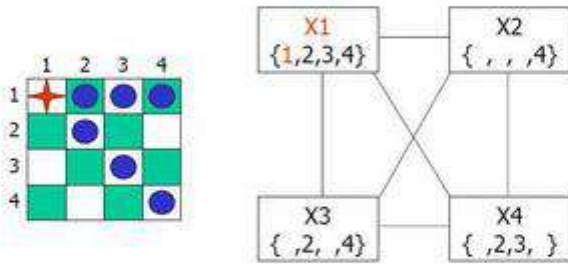
(C) Hervé Barbot, 2005-2012



(C) Hervé Barbot, 2005-2012

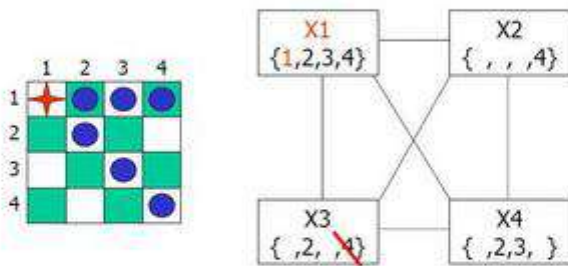


(C) Hervé Barbot, 2005-2012



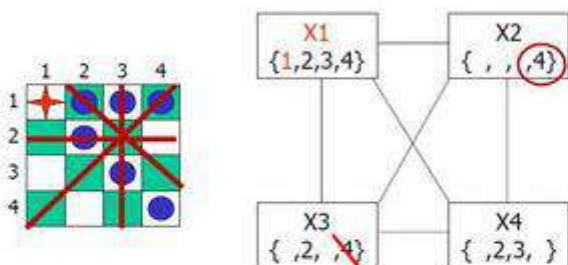
(C) Hervé Barbot, 2005-2012

39



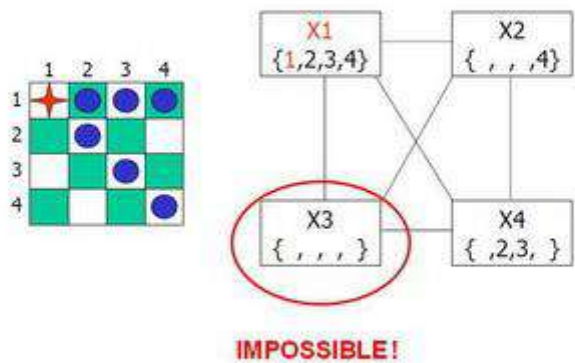
(C) Hervé Barbot, 2005-2012

40



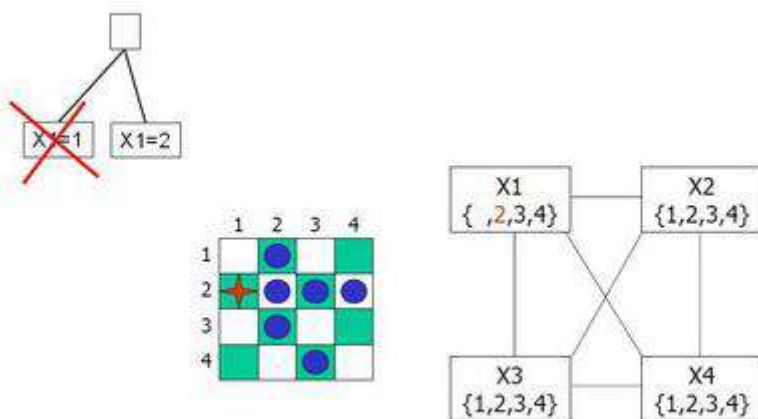
(C) Hervé Barbot, 2005-2012

41



(C) Hervé Barbot, 2005-2012

42



(C) Hervé Barbot, 2005-2012

43

Contraintes non binaires

- Contraintes difficiles à propager
- On peut se ramener à des contraintes binaires en ajoutant des variables

(C) Hervé Barbot, 2005-2012

44