4

CE AN RATTR. L'3 2012

ENONCE

REPRESENTATION DES NOMBRES

Exercice 1 – Représentation flottante simple précision ✦

A) Convertir $\frac{(5+3)(1+7\times 9)}{64^{28}}$ en représentation flottante $IEEE_{754}$ au format simple précision.

B) Quelle est la plus petite valeur positive normalisée représentable au format $IEEE_{754}$ simple précision ? Expliquez.

C) Y-a-t-il moyen de représenter une valeur encore plus petite ? Lequel ? Quelle est alors la plus petite valeur représentable ?

SYSTEMES D'EQUATIONS

Exercice 2 – Pivot de Gauss partiel ✦

A) Résoudre le système suivant par la méthode du pivot de Gauss partiel : $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & 2 & 15 \\ 2 & 1 & 3 & 13 \end{array}\right)$

B) Ce système est-il à diagonale dominante ? Justifiez votre réponse.

Interpolations

Exercice 3 – Lagrange et Newton ✦✦

Etant donné l'ensemble de points suivant :

$$\begin{pmatrix} x_i & -1 & 0 & 1 & 2 \\ y_i & 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

A) En donner, sous forme réduite et factorisée, le polynôme d'interpolation de Lagrange.

B) En donner, sous forme réduite et factorisée, le polynôme d'interpolation de Newton.

CORRIGE

Representation des nombres

Exercice 1 – Représentation flottante simple précision ✦

Dans le format simple précision, l'excédent (qui permet de coder et fixer les bornes de l'exposant dans ce format) est : $E_0 = 2^{|E|-1} - 1 = 2^7 - 1 = 127$

La formule de décodage IEEE_{754} simple précision est donc (avec dans tous les cas $0 < E < 2^{|E|} - 1 \Leftrightarrow 1 \leq E \leq 2\left(2^{|E|-1} - 1\right)$) :

- En format normalisé : $\text{fl}(a) = (-1)^S (1+M) 2^{E-127}$.
- En format dénormalisé : $(-1)^S (0,M) 2^{E-127}$ avec $M \neq 0$.

B) Plus petite valeur strictement positive normalisée

La plus petite valeur (strictement) positive représentable au format IEEE_{754} simple précision normalisé est donc : $(-1)^0 (1+0) 2^{1-127} = 2^{-126}$

C) Plus petite valeur strictement positive dénormalisée

Le plus petit nombre strictement positif représentable au format IEEE_{754} simple précision dénormalisé est donc : $2^{-23} 2^{-126} = 2^{-149}$.

A) $\dfrac{(5+3)(1+7\times 9)}{64^{28}}$ **en représentation flottante IEEE$_{754}$ simple précision**

$$\frac{(5+3)(1+7\times 9)}{64^{28}}=\frac{8\times 64}{64^{28}}=\frac{2^3}{\left(2^6\right)^{27}}=\frac{1}{2^{3(2\times 27-1)}}=2^{-159}$$

Par conséquent, cette valeur n'est pas représentable au format IEEE$_{754}$ simple précision, et sera donc arrondie à 0.

SYSTEMES D'EQUATIONS

Exercice 2 – Pivot de Gauss partiel ✦

A) Résolution par pivot de Gauss partiel

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & 2 & 15 \\ 2 & 1 & 3 & 13 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_1 \\[1em] L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{3}L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 7/3 & 5/3 & 35/3 \\ 0 & -1/3 & 7/3 & 19/3 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{7}L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 7/3 & 5/3 & 35/3 \\ 0 & 0 & 18/7 & 8 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_3=\dfrac{8\times 7}{18}=\dfrac{28}{9} \\[1em] x_2=\dfrac{\frac{35}{5}-\frac{5}{3}\times\frac{28}{9}}{\frac{7}{3}}=\dfrac{9\times 35-5\times 28}{7\times 9}=\dfrac{25}{9} \\[1em] x_1=\dfrac{10-\frac{28}{9}-2\frac{25}{9}}{3}=\dfrac{90-28\times 50}{27}=\dfrac{4}{9} \end{cases}$$

Note 1 – En l'occurrence, le pivot partiel revient au pivot simple.

Note 2 – A refaire avec énoncé où le 15 est remplacé par 13.

B) Diagonale dominante

Pour toutes les lignes le coefficient de la diagonale est égal à la somme des autres coefficients de la ligne. Le critère de diagonale dominante est un critère strict, donc la matrice n'est pas à diagonale dominante et la convergence des méthodes itératives de Jacobi et de Gauss-Siedel n'est donc pas assurée.

INTERPOLATIONS

Exercice 3 – Lagrange et Newton ✦✦

$$\begin{pmatrix} x_i & -1 & 0 & 1 & 2 \\ y_i & 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

A) Interpolation de Lagrange

$$L(x) = 3\frac{(x+1)x(x-1)}{3\times2\times1} - \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{1\times-1\times-2} = \frac{(x^2-1)(x-x+2)}{2} = x^2-1$$

B) Interpolation de Newton

$$\begin{pmatrix} x_i & \nabla^0 y_i & \nabla^1 y_i & \nabla^2 y_i & \nabla^3 y_i \\ -1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & \\ 2 & 3 & 1 & 1 & \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0(x) = 0$$
$$P_1(x) = 1 + (x-2)P_0(x) = 1$$
$$P_2(x) = 0 + (x-1)P_1(x) = (x-1)$$
$$N(x) = P_3(x) = 0 + (x+1)P_2(x) = x^2-1$$