4

CE AN L3 2012

ENONCE

REPRESENTATION DES NOMBRES

Exercice 1 – Représentation flottante grande précision ✦✦✦

A) Convertir $\frac{1}{119}$ en représentation flottante $IEEE_{754}$ au format grande précision.

B) Quelle est la plus petite valeur strictement positive normalisée représentable au format $IEEE_{754}$ grande précision (On rappelle que l'exposant occupe 15 bits dans ce format) ? (1 pt)

C) Y-a-t-il moyen de représenter une valeur strictement positive encore plus petite ? Lequel ? Quelle est alors la plus petite valeur représentable ?

ERREURS D'APPROXIMATION

Exercice 2 – Erreurs d'approximation ✦✦

A) Résoudre le système $\left(\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$ où $0 < |\varepsilon| \ll 1$, d'une part avec la méthode du pivot de Gauss simple et d'autre part avec celle du pivot de Gauss total en mettant en évidence la manière dont la première méthode, mise en œuvre par un calculateur numérique travaillant en représentation flottante, conduit à un résultat faux quand la seconde évite la propagation de l'erreur.

B) Mettre en évidence la manière dont le calcul numérique en représentation flottante des racines d'une équation polynômiale de degré deux peut conduire à un résultat totalement erroné. Préciser les conditions d'occurrence d'une telle erreur. Proposer une stratégie de calcul qui constitue un bouclier efficace contre cette erreur.

SYSTEMES D'EQUATIONS

Exercice 3 – Pivot de Gauss total et méthodes itératives ✦✦✦

A) Résoudre le système suivant par la méthode du pivot de Gauss total (3 pts) :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ 1 & \beta & \beta^2 & \beta^3 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 & \gamma^3 \end{array}\right), \begin{cases} 1 < \alpha < \beta < \gamma < 2 \\ \alpha + \beta > \gamma \end{cases}$$

Votre note dépend de votre vérification rigoureuse des hypothèses de travail pour le choix des pivots, ainsi que de la restitution dans le bon ordre des composantes du vecteur solution.

B) Donner une condition rigoureusement formelle suffisante pour assurer que les méthodes de Jacobi et de Gauss-Siedel appliquées au système suivant convergent :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^{n-1} & \alpha_1^n \\ 1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_2^{n-1} & \alpha_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \dots & \alpha_n^{n-1} & \alpha_n^n \end{array}\right), 1 < \alpha_1 < \alpha_i < \alpha_{j, i<j} < \alpha_n < 2$$

C) Donner les deux formules d'itération, pour résoudre le système $n \times n$ respectivement par la méthode de Jacobi et par la méthode Gauss-Siedel.

INTERPOLATIONS ET APPROXIMATIONS

Exercice 3 – Interpolation complexe ✦✦✦

Etant donné l'ensemble de points $\begin{pmatrix} x_i & y_i \end{pmatrix}_{i \in [\![1 \quad 4]\!]}$ suivants à valeurs dans $\mathbb{C}$ et le polynôme d'interpolation de ces points : $\begin{pmatrix} x_i & 0 & -1 & 2i & \frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right) \\ y_i & 1 & 0 & -3(1+2i) & i\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Calculer à l'aide de la méthode de Lagrange la valeur d'interpolation en $x = i$.

Exercice 4 – Réflexion théorique ✦✦✦

A) Soient deux points distincts $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \end{pmatrix}$:

Démontrer formellement que la droite d'interpolation et la droite obtenue par régression linéaire coïncident.

B) Etant donnée une famille de n points deux à deux distincts :

Le polynôme d'approximation de degré n – 1 selon la méthode des moindres carrés est-il égal ou non au polynôme d'interpolation ? Justifiez votre réponse formellement, ou ne répondez pas.

CORRIGE

REPRESENTATION DES NOMBRES

Exercice 1 – Représentation flottante grande précision ✦✦✦

A) $\frac{1}{119}$ en représentation flottante IEEE$_{754}$ au format grande précision

L'excédent (qui permet de coder et fixer les bornes de l'exposant dans ce format) est :

$$E_0 = 2^{|E|-1} - 1 = 2^{14} - 1 = 16383$$

La formule de décodage IEEE$_{754}$ double précision est donc : $\mathrm{fl}(a) = (-1)^S (1+M) 2^{E-16383}$.

$\frac{1}{119} > 0$ donc $S = 0$.

$\frac{1}{128} < \frac{1}{119} < \frac{1}{64}$ donc $\frac{1}{119} = \frac{1}{128}(1+r_1)$ avec $r_1 < 1$ en l'occurrence : $r_1 = \frac{128}{119} - 1 = \frac{9}{119}$.

$\frac{1}{16} < \frac{9}{119} < \frac{1}{8}$ donc $\frac{1}{119} = \frac{1}{128}\left(1+\frac{1}{16}(1+r_2)\right)$ avec $r_2 = \frac{16\times 9}{119} - 1 = \frac{144-119}{119} = \frac{25}{119}$.

En itérant, on trouve :

$$\frac{1}{119} = \frac{1}{2^7}\left(1+\frac{1}{2^4}\left(1+\frac{1}{2^3}\left(1+\frac{1}{2^1}\left(1+\frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{2^1}\left(1+\frac{1}{2^1}\left(1+\frac{1}{2^3}\left(1+\frac{1}{119}\right)\right)\right)\right)\right)\right)\right)\right)\right)$$

Et donc : $\frac{1}{119} = 2^{-7} + 2^{-11} + 2^{-14} + 2^{-15} + 2^{-17} + 2^{-19} + 2^{-20} + 2^{-21} + 2^{-24}\left(1+\frac{1}{119}\right)$

Soit : $\dfrac{1}{119} = \left(2^{-7} + 2^{-11} + 2^{-14} + 2^{-15} + 2^{-17} + 2^{-19} + 2^{-20} + 2^{-21} + 2^{-24}\right) \sum_{i=0}^{+\infty} 2^{-24i}$

Et donc, en base deux : $\begin{aligned} \frac{1}{119} &= \left(0,\underline{000000100010011010111001}\right)_2 \\ \frac{1}{119} &= \left(1,\underline{000100110101110010000001}\right)_2 \times 2^{-7} \end{aligned}$

On en déduit l'encodage de l'exposant et de la mantisse de 64 bits :

$$\begin{cases} E = E_0 - 7 = 16383 - 7 = 16376 = \left(0\underbrace{1\ldots1}_{14}\right)_2 - (111)_2 = \left(0\underbrace{1\ldots1}_{11}000\right)_2 \\ M = \left({\color{blue}000100110101110010000001}{\color{red}000100110101110010000001}0001001101011100\right)_2 \end{cases}$$

B) Plus petite valeur strictement positive normalisée

La plus petite valeur (strictement) positive normalisée représentable au format IEEE$_{754}$ grande précision est : $(-1)^0(1+0)2^{1-16383} = 2^{-16382}$

C) Plus petite valeur strictement positive dénormalisée

Le format IEEE$_{754}$ double précision dénormalisé est $(-1)^0(0,M)2^{-16382}$ avec $M \neq 0$.

Dans ce format, le plus petit nombre strictement positif représentable est $2^{-64}2^{-16382} = 2^{-16446}$.

Erreurs d'approximation

Exercice 2 – Erreurs d'approximation ✦✦

A) Gausse simple vs. Gauss total

Gausse simple

Pas de remontée du pivot de poids le plus fort.

On matérialise en rouge la valeur rigoureusement fausse obtenue par réintroduction de l'approximation de la première composante dans la formule d'obtention de la seconde :

$$\left(\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{\varepsilon} L_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 1 & 1 \\ 0 & \left(2-\frac{1}{\varepsilon}\right) & \left(3-\frac{1}{\varepsilon}\right) \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{3-\frac{1}{\varepsilon}}{2-\frac{1}{\varepsilon}} = \dfrac{3\varepsilon-1}{2\varepsilon-1} \approx 1 \\ x_1 = \dfrac{1}{\varepsilon}(1-x_2) = 0 = \dfrac{1}{\varepsilon}\left(1-\dfrac{3\varepsilon-1}{2\varepsilon-1}\right) = \dfrac{1}{1-2\varepsilon} \approx 1 \end{cases}$$

Pivot de Gauss total

Remontée du pivot de poids le plus fort (en valeur absolue).

On matérialise en vert la valeur obtenue par réintroduction de l'approximation de la première composante obtenue dans la formule d'obtention de la seconde :

$$\left(\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ C_1 \leftrightarrow C_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 1 & \varepsilon & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2} L_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \varepsilon-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{1-2\varepsilon} \approx 1 \\ x_2 = \dfrac{3-x_1}{2} = 1 = \dfrac{3-\frac{1}{1-2\varepsilon}}{2} = \dfrac{1-3\varepsilon}{1-2\varepsilon} \approx 1 \end{cases}$$

B) Calcul flottant sécurisé des racines d'une équation du second degré

Exposé du problème

Etant donnée une équation polynomiale du second degré à coefficients dans $\mathbb{R}$ dont on recherche les racines réelles : $ax^2+bx+c=0$.

La méthode classique de résolution se résume à ceci :

Si le discriminant $\Delta = b^2-4ac$ est strictement positif, il existe deux racines distinctes, s'il est nul, il n'existe qu'une racine double, et sinon, il n'y a pas de racine.

Les racines pour $\Delta > 0$ sont respectivement : $\begin{cases} x_M = -\frac{\varepsilon_b}{2a}\left(|b|+\sqrt{\Delta}\right) \\ x_m = -\frac{\varepsilon_b}{2a}\left(|b|-\sqrt{\Delta}\right) \end{cases}$ où ε_b est le signe de b.

Cependant, pour $b^2 \gg |ac|$ on a $\sqrt{\Delta} \approx |b|$ et plus précisément, avec une approximation du second ordre ($\sqrt{1+x} \underset{0}{\approx} 1+\frac{x}{2}$) de la racine de poids faible x_m, il vient que :

$$\begin{cases} x_M \approx -\frac{b}{a} \\ x_m \approx -\frac{\varepsilon_b\left(|b|-|b|\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{4ac}{b^2}\right)\right)\right)}{2a} = -\frac{c}{b} \end{cases}$$

Par un calcul numérique qui injecte directement le discriminant, préalablement calculé, dans les deux formules respectives d'obtention des racines, on observe que si $\frac{2|ac|}{b^2} < 2^{-t}$, avec t la taille de la mantisse, alors $x_m \approx \frac{-b+b}{2a} = 0$, ce qui revient à une approximation du premier ordre (ce qui revient a peu près au même que l'erreur logique d'ajouter ou soustraire directement des équivalent asymptotiques en analyse).

La parade

Une équation du second degré comportant deux racines vérifie :

$(x-x_M)(x-x_m) = x^2-(x_M+x_m)x+x_M x_m$, c'est-à-dire $\begin{cases} x_M + x_m = -\frac{b}{a} \\ x_M x_m = \frac{c}{a} \end{cases}$

En conséquence, en considérant la racine de poids lourd x_M calculée comme ci-dessus, une alternative de calcul de la racine de poids faible est : $x_m = \frac{c}{ax_M}$.

On vérifie que lorsque $b^2 \gg |ac|$: $x_M \approx -\frac{b}{a} \Rightarrow x_m = \frac{c}{a}\times-\frac{a}{b} \approx -\frac{c}{b} \neq 0$

Cette seconde méthode de calcul est donc un bouclier efficace contre l'erreur d'approximation.

SYSTEMES D'EQUATIONS

Exercice 3 – Pivot de Gauss total et méthodes itératives ✦✦✦

A) Déroulement rigoureux du pivot de Gauss total

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ 1 & \beta & \beta^2 & \beta^3 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 & \gamma^3 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ C_1 \leftrightarrow C_3 \\ \sigma(X) = (1 \quad 3) \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} \gamma^2 & \gamma & 1 & \gamma^3 \\ \beta^2 & \beta & 1 & \beta^3 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 & \alpha^3 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - \dfrac{\beta^2}{\gamma^2} L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \dfrac{\alpha^2}{\gamma^2} L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \gamma^2 & \gamma & 1 & \gamma^3 \\ 0 & \gamma^{-1}\beta(\gamma-\beta) & \gamma^{-2}\left(\gamma^2-\beta^2\right) & \beta^2(\beta-\gamma) \\ 0 & \gamma^{-1}\alpha(\gamma-\alpha) & \gamma^{-2}\left(\gamma^2-\alpha^2\right) & \alpha^2(\alpha-\gamma) \end{array}\right) \quad ?$$

Avant de poursuivre, il est indispensable d'identifier quel est le coefficient maximum parmi :

$$\begin{cases} a_{22} = \gamma^{-1}\beta(\gamma-\beta) \\ a_{23} = \gamma^{-2}\left(\gamma^2-\beta^2\right) \\ a_{32} = \gamma^{-1}\alpha(\gamma-\alpha) \\ a_{33} = \gamma^{-2}\left(\gamma^2-\alpha^2\right) \end{cases}$$

Comparaisons verticales

$$\frac{a_{32}}{a_{22}} > 1 \Leftrightarrow \alpha(\gamma-\alpha) > \beta(\gamma-\beta) \Leftrightarrow (\beta-\alpha)(\beta+\alpha) > \gamma(\beta-\alpha)$$

Or : $(\beta-\alpha)(\beta+\alpha) > \gamma(\beta-\alpha) \wedge \beta > \alpha \Leftrightarrow \beta+\alpha > \gamma \wedge \beta > \alpha$

On en déduit, compte tenu des hypothèses de l'exercice, que $a_{32} > a_{22}$.

$$\frac{a_{33}}{a_{23}} > 1 \Leftrightarrow \gamma^2 - \alpha^2 > \gamma^2 - \beta^2 \Leftrightarrow \beta^2 > \alpha^2$$

On en déduit, compte tenu des hypothèses de l'exercice, que $a_{33} > a_{23}$.

Comparaisons horizontales

$$\frac{a_{33}}{a_{32}} > 1 \Leftrightarrow \gamma^{-2}\left(\gamma^2-\alpha^2\right) > \gamma^{-1}\alpha(\gamma-\alpha) \Leftrightarrow (\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha) > \gamma\alpha(\gamma-\alpha)$$

Or : $\begin{aligned}&(\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha) > \gamma\alpha(\gamma-\alpha) \wedge \gamma > \alpha \Leftrightarrow \gamma+\alpha > \gamma\alpha \wedge \gamma > \alpha \\ &\Leftrightarrow \gamma+\alpha > \gamma\alpha \wedge \gamma > \alpha \Leftrightarrow 1 > (\alpha-1)(\gamma-1) \wedge \gamma > \alpha\end{aligned}$

Compte tenu des hypothèses de l'exercice, on vérifie que $a_{33} > a_{32}$.

Par transitivité de la relation d'ordre, le nouveau pivot est nécessairement a_{33}.

Finalisation

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \gamma^2 & \gamma & 1 & \gamma^3 \\ 0 & \gamma^{-1}\beta(\gamma-\beta) & \gamma^{-2}\left(\gamma^2-\beta^2\right) & \beta^2(\beta-\gamma) \\ 0 & \gamma^{-1}\alpha(\gamma-\alpha) & \gamma^{-2}\left(\gamma^2-\alpha^2\right) & \alpha^2(\alpha-\gamma) \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftrightarrow L_3 \\ C_2 \leftrightarrow C_3 \\ \sigma(X) = (1 \quad 3)(2 \quad 3) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \gamma^2 & 1 & \gamma & \gamma^3 \\ 0 & \gamma^{-2}\left(\gamma^2-\alpha^2\right) & \gamma^{-1}\alpha(\gamma-\alpha) & \alpha^2(\alpha-\gamma) \\ 0 & \gamma^{-2}\left(\gamma^2-\beta^2\right) & \gamma^{-1}\beta(\gamma-\beta) & \beta^2(\beta-\gamma) \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{\left(\gamma^2-\beta^2\right)}{\left(\gamma^2-\alpha^2\right)} L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \gamma^2 & 1 & \gamma & \gamma^3 \\ 0 & \gamma^{-2}\left(\gamma^2-\alpha^2\right) & \gamma^{-1}\alpha(\gamma-\alpha) & \alpha^2(\alpha-\gamma) \\ 0 & 0 & \gamma^{-1}(\gamma-\beta)\left(\beta-\alpha\dfrac{\gamma+\beta}{\gamma+\alpha}\right) & (\gamma-\beta)\left(\alpha^2\dfrac{\gamma+\beta}{\gamma+\alpha}-\beta^2\right) \end{array}\right).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{\sigma_3} = x_2 = \dfrac{(\gamma-\beta)\left(\alpha^2\dfrac{\gamma+\beta}{\gamma+\alpha}-\beta^2\right)}{\gamma^{-1}(\gamma-\beta)\left(\beta-\alpha\dfrac{\gamma+\beta}{\gamma+\alpha}\right)} = -\left((\alpha+\beta)\gamma+\alpha\beta\right) = -\gamma\alpha\beta\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}\right) \\ x_{\sigma_2} = x_1 = \dfrac{\alpha^2(\alpha-\gamma)+\gamma^{-1}\alpha(\gamma-\alpha)\left((\alpha+\beta)\gamma+\alpha\beta\right)}{\gamma^{-2}\left(\gamma^2-\alpha^2\right)} = \gamma\alpha\beta \\ x_{\sigma_1} = x_3 = \dfrac{\gamma^3+\gamma\left((\alpha+\beta)\gamma+\alpha\beta\right)-\gamma\alpha\beta}{\gamma^2} = \gamma+\alpha+\beta \end{cases}$$

Vérification

$x_1+\alpha x_2+\alpha^2 x_3 = \gamma\alpha\beta-\alpha\left((\alpha+\beta)\gamma+\alpha\beta\right)+\alpha^2(\gamma+\alpha+\beta) =$

$\gamma\alpha\beta-\alpha^2\gamma-\alpha\beta\gamma-\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\alpha^3+\alpha^2\beta = \alpha^3$

B) Critère d'Hadamard

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^{n-1} & \alpha_1^n \\ 1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_2^{n-1} & \alpha_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \dots & \alpha_n^{n-1} & \alpha_n^n \end{array}\right), 1<\alpha_1<\alpha_i<\alpha_{j,i<j}<\alpha_n<2$$

Le critère d'Hadamard (matrice à diagonale dominante) est une condition suffisante pour valider la convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Siedel.

Une matrice $(A_{ij})_{ij\in[\![1\quad n]\!]^2}$ est a diagonale dominante ssi $(1)\forall i\in[\![1\quad n]\!]:|A_{ii}|>\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}|A_{ij}|$.

En l'occurrence, $|A_{ij}| = a_i^{j-1}, 0<a_i^{j-1}<2^{j-1}$.

Or $\forall i\in[\![1\quad n-1]\!]: a_i>1 \Leftrightarrow a_i^{i+1}=a_i a_i^i > a_i^i \Rightarrow \sum_{j=1,\,j\neq i}^{n} a_i^{j-1} > a_i^{i+1} > a_i^i$.

La matrice n'est donc pas à diagonale dominante, et il n'est donc pas assuré que les méthodes de Jacobi ou Gauss-Siedel convergent.

Notons que $\sum_{j=1}^{n-1} a_n^{j-1} = \frac{a_n^n - 1}{a_n - 1}$.

Or : $\frac{a^n - 1}{a - 1} < a^n \Leftrightarrow 2a^n - 1 < a^{n+1} \Leftrightarrow a^n < \frac{1}{2-a} \Leftrightarrow n < \ln_a\left(\frac{1}{2-a}\right)$ et donc, la dernière ligne ne vérifie donc pas non plus systématiquement le critère.

C) Transcription des formules de Jacobi et de Gauss-Siedel

Par application directe de la formule de Jacobi :

$$\begin{cases} M = D \\ N = D - A = L + U \end{cases} \Rightarrow x_i^{(k+1)} = \frac{1}{A_{ii}}\left(b_i - \sum_{j \neq i} A_{ij} x_j^{(k)}\right)$$

Il vient : $\forall i \in [\![1 \quad n]\!] : x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_i^{i-1}}\left(a_i^n - \sum_{j \neq i} a_i^{j-1} x_j^{(k)}\right) = a_i^{n-i+1} - \frac{\sum_{j \neq i} a_i^{j-1} x_j^{(k)}}{a_i^{i-1}}$

Par application directe de la formule de Gauss-Siedel :

$$\begin{cases} M = D - L \\ N = U \end{cases} \Rightarrow x_i^{(k+1)} = \frac{1}{A_{ii}}\left(b_i - \left(\sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij} x_j^{(k)}\right)\right)$$

Il vient : $\forall i \in [\![1 \quad n]\!] : x_i^{(k+1)} = a_i^{n-i+1} - \frac{\sum_{j=1}^{i-1} a_i^{j-1} x_j^{(k+1)}}{a_i^{i-1}} - \sum_{j=i+1}^{n} a_i^{j-i} x_j^{(k)}$

INTERPOLATIONS ET APPROXIMATIONS

Exercice 4 – Interpolation complexe ✦✦✦

Etant donné l'ensemble de points $(z_i \quad \zeta_i)_{i\in[\![1 \quad 4]\!]}$ *suivants à valeurs dans* $\mathbb{C}$ *et le polynôme d'interpolation de ces points :* $\begin{pmatrix} z_i & 0 & -1 & 2i & \frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right) \\ \zeta_i & 1 & 0 & -3(1+2i) & i\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Calculer à l'aide de la méthode de Lagrange la valeur d'interpolation en $z=i$.

Notons que $\begin{cases} \zeta_3 = -3(1+z_3) \\ \zeta_4 = 2z_4 - 1 \end{cases}$ et que $z_4 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ d'où $\begin{cases} z_4^2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{2}\left(i\sqrt{3}-1\right) \\ z_4^3 = e^{i\frac{3\pi}{3}} = -1 \end{cases}$

Calculons les termes utiles du polynôme de Lagrange :

$$\zeta_1\ell_1(z) = \frac{(z+1)(z-z_3)(z-z_4)}{z_3 z_4}$$

$$\zeta_3\ell_3(z) = \zeta_3\frac{z(z+1)(z-z_4)}{z_3(z_3+1)(z_3-z_4)} = \frac{3z(z+1)(z-z_4)}{z_3(z_4-z_3)}$$

$$\zeta_4\ell_4(z) = \zeta_4\frac{z(z+1)(z-z_3)}{z_4(z_4+1)(z_4-z_3)} = \frac{(2z_4-1)z(z+1)(z-z_3)}{z_4(z_4+1)(z_4-z_3)}$$

Interpolons en $z=i$:

$$L(i) = \zeta_1\ell_1(i) + \zeta_3\ell_3(i) + \zeta_4\ell_4(i)$$
$$L(i) = \frac{(i+1)(i-z_3)(i-z_4)}{z_3 z_4} + \frac{3i(i+1)(i-z_4)}{z_3(z_4-z_3)} + \frac{(2z_4-1)i(i+1)(i-z_3)}{z_4(z_4+1)(z_4-z_3)}$$
$$L(i) = \frac{i+1}{z_3 z_4(1+z_4)(z_4-z_3)}\begin{pmatrix} (i-z_3)(i-z_4)(1+z_4)(z_4-z_3) + \\ 3i(i-z_4)z_4(1+z_4) + \\ (2z_4-1)i(i-z_3)z_3 \end{pmatrix}$$

Remplaçons la variable z_3 par sa valeur $2i$:

$$L(i)=\frac{i+1}{2iz_4(1+z_4)(z_4-2i)}\begin{pmatrix}(-i)(i-z_4)(1+z_4)(z_4-2i)+\\ 3i(i-z_4)z_4(1+z_4)+\\ (2z_4-1)i(-i)2i\end{pmatrix}$$

$$L(i)=\frac{i+1}{2z_4(1+z_4)(z_4-2i)}\begin{pmatrix}(1+z_4)(i-z_4)(2i-z_4)+\\ 3(1+z_4)(i-z_4)z_4+\\ 2(2z_4-1)\end{pmatrix}$$

$$L(i)=\frac{(i+1)\left((1+z_4)(i-z_4)(i+z_4)+2z_4-1\right)}{z_4(1+z_4)(z_4-2i)}$$

$$L(i)=\frac{(i+1)\left((1+z_4)(-1-z_4^2)+2z_4-1\right)}{z_4(1+z_4)(z_4-2i)}=\frac{(i+1)\left(-1-z_4-z_4^2-z_4^3+2z_4-1\right)}{3z_4(1+z_4)(z_4-2i)}$$

$$L(i)=\frac{(i+1)\left(-1+z_4-z_4^2\right)}{3z_4(1+z_4)(z_4-2i)}=\frac{(i+1)(-1+1)}{3z_4(1+z_4)(z_4-2i)}=0$$

La valeur d'interpolation en $z=i$ est donc 0.

Exercice 5 – Réflexion théorique ✦✦✦

A) Vérification pour le cas de la régression linéaire à deux points

Soient deux points distincts $(x_1 \quad y_1)$ et $(x_2 \quad y_2)$.

Le polynôme d'interpolation est :

$$P(x)=\alpha_0+\alpha_1 x=y_1\frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)}+y_2\frac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)}=\frac{(y_1-y_2)x+(x_1y_2-x_2y_1)}{(x_1-x_2)}$$

Les coefficients d'interpolation sont respectivement : $\begin{cases}\alpha_0=\dfrac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1-x_2}\\ \alpha_1=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\end{cases}$

Par application des formules de régression linéaire, les coefficients du polynôme d'approximation $A(x) = a_0 + a_1 x$ à deux paramètres se résolvent en :

$$a_0 = \frac{\overline{y}.\overline{x^2} - \overline{x}.\overline{xy}}{\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2} = \frac{\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)\left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\right) - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\left(\frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{2}\right)}{\left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\right) - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2}$$

$$a_0 = \frac{(y_1 + y_2)(x_1^2 + x_2^2) - (x_1 + x_2)(x_1 y_1 + x_2 y_2)}{2(x_1^2 + x_2^2) - (x_1 + x_2)^2}$$

$$a_0 = \frac{x_1^2 y_1 + x_2^2 y_1 + x_1^2 y_2 + x_2^2 y_2 - x_1^2 y_1 - x_1 x_2 y_2 - x_1 x_2 y_1 - x_2^2 y_2}{2(x_1^2 + x_2^2) - x_1^2 - x_2^2 - 2x_1 x_2}$$

$$a_0 = \frac{x_2^2 y_1 + x_1^2 y_2 - x_1 x_2 y_2 - x_1 x_2 y_1}{(x_1 - x_2)^2} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 y_2 - x_2 y_1)}{(x_1 - x_2)^2} = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2} = \alpha_0$$

Et :

$$a_1 = \frac{\overline{y} - a_0}{\overline{x}} = \frac{y_1 + y_2 - 2a_0}{x_1 + x_2} = \frac{y_1 + y_2 - 2\frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}}{x_1 + x_2}$$

$$a_1 = \frac{x_1 y_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1 - x_2 y_2 - 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1}{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)} = \frac{x_1 y_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1 - x_2 y_2 - 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1}{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}$$

$$a_1 = \frac{x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_1 y_2 + x_2 y_1}{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \alpha_1$$

Conclusion : la droite d'interpolation et la droite obtenue par régression linéaire sur deux points distincts coïncident.

Démonstration générale

Etant donnée une famille $\left(x_j \quad y_j\right)_{j \in [\![1 \quad p]\!]}$ de p points deux à deux distincts, définissant une relation univoque et surjective à gauche (une application).

Le polynôme d'interpolation $P(x)=\sum_{j=1}^{p}\alpha_j x^{j-1}$ vérifie :

(1) $\forall k\in[\![1 \quad p]\!] : P(x_k)=y_k=\sum_{j=1}^{p}\alpha_j x_k^{j-1}$

Le polynôme d'approximation à $m\leq p$ paramètres $A(x)=\sum_{j=1}^{m}a_j x^{j-1}$ vérifie :

(2) $\forall i\in[\![1 \quad m]\!] : \frac{\partial S}{\partial a_i}=2\sum_{k=1}^{p}x_k^{i-1}\left(y_k-\sum_{j=1}^{m}a_j x_k^{j-1}\right)=0\Leftrightarrow\sum_{j=1}^{m}a_j\sum_{k=1}^{p}x_k^{i+j-2}=\sum_{k=1}^{p}y_k x_k^{i-1}$

Et donc en particulier pour $m=p$: (2.1) $\forall i\in[\![1 \quad p]\!] : \sum_{j=1}^{p}a_j\sum_{k=1}^{p}x_k^{i+j-2}=\sum_{k=1}^{p}y_k x_k^{i-1}$

De (1) on dérive : (1.1) $\forall k\in[\![1 \quad p]\!]\forall i\in[\![1 \quad p]\!] : y_k x_k^{i-1}=x_k^{i-1}P(x_k)=\sum_{j=1}^{p}\alpha_j x_k^{i+j-2}$

Puis : (1.2) $\forall i\in[\![1 \quad p]\!] : \sum_{k=1}^{p}y_k x_k^{i-1}=\sum_{k=1}^{p}x_k^{i-1}P(x_k)=\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\alpha_j x_k^{i+j-2}=\sum_{j=1}^{p}\alpha_j\sum_{k=1}^{p}x_k^{i+j-2}$

Par identification des systèmes (2.1) et (1.2), $m=p\Leftrightarrow\forall j\in[\![1 \quad p]\!] : \alpha_j=a_j$, c'est-à-dire $m=p\Leftrightarrow A(x)=P(x)$.

Conclusion : le polynôme d'approximation de degré $p-1$ de p points est le polynôme d'interpolation.