ALGO - NUM L'3

1. → Representation flout en memoire

2. → Pivot de GAUS
   - ↳ normal
   - ↳ partial in my head
   - ↳ Total

3. → Resolution de Systeme d'equation
   - ↳ Jacobi ✓
   - ↳ gauss seidel ✓

4. → interpolation
   - ↳ la grange ✓
   - ↳ newton ✓
   - ↳ neville ✓

5. → regression lineaire
   - ↳ c'est le titre, lol ✓

2

JACOBI : permet de resoudre des inegation
c-est un algorythme iterratif

enoncé type : 1 matrice, 2 Matrice

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

1/ multiplier (multiplication matricielle, LxC)

$$\begin{bmatrix} 4x_1 & -1\times x_2 & +1\times x_3 \\ -1x_1 & +4x_2 & -2x_3 \\ -1x_1 & -2x_2 & +4x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

2/ on a ici un systeme

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases}$$

3/ on sort x_1, x_2, x_3

$x_1 = (+x_2 - x_3 + 12)/4$

$x_2 = (+x_1 + 2x_3 - 1)/4$

$x_3 = (-x_1 + 2x_2 + 5)/4$

JACobi : Maintenan, on commence :

1/ on injecte 0 dans x_1, x_2, x_3 a droite et on calcul les nouveau x_1, x_2, x_3

2/ ON reinjecte les Valeur a droite et ainsi de suite jusqu-a stabilisation

(1)

$x_1 : 0 - 0 + 12/4 = 12/4$

$x_2 = 0 + 0 - 1/4 = -1/4$

$x_3 = -0 + 0 + 5/4 = 5/4$

on reinjecte ces 3 valeurs ds les eq et on calcule

(2)

$x_1 = \left(-\frac{1}{4} - \frac{5}{4} + 12\right)/4 = 21/8 = 2{,}625$

$x_2 = \left(\frac{12}{4} + \frac{2 \times 5}{4} - 1\right)/4 = 9/8 = 1{,}125$

$x_3 = \left(-\frac{12}{4} + 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) + 5\right)/4 = 3/8 = 0{,}375$

→ pareil

(3) etc

$x_1 = (1{,}125 - 0{,}375 + 12)/4 = 3{,}1875$

$x_2 = (2{,}625 + 2 \times 0{,}375 - 1)/4 = 0{,}594$

$x_3 = (-2{,}625 + 2 \times 1{,}125 + 5)/4 = 1{,}1563$

→ pareil

ON continue continue jusqu'a stabilisation gauss seidel = Jacobi amelioré

on essaye 0, 0, 0
sauf première fois la ligne 1 calculé
on injecte ds la L_2 ce x_1
puis une fois la ligne 3 calculé
on injecte ds L_3, x_1 et x_2

* resoudre

$$10x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \qquad x_1 = \frac{-2x_2}{10} + \frac{x_3}{10} + \frac{7}{10}$$

$$x_1 + 8x_2 + 3x_3 = -4 \qquad x_2 = \frac{-x_1}{8} + \frac{-3x_3}{8} - \frac{1}{2}$$

$$-2x_1 - x_2 + 10x_3 = 9 \qquad x_3 = \frac{2x_1}{10} + \frac{x_2}{10} + \frac{9}{10}$$

* Valeur (initiale)

P1

$x_1 = 0,7$

$x_2 = \frac{-0,7}{8} - \frac{1}{2} = -0,5875$

$x_3 = \frac{2 \times 0,7}{10} + \frac{-0,5875}{10} + \frac{9}{10} = 0,98125$

P2

$x_1 = \frac{+2 \times 0,5875}{10} + \frac{0,98125}{10} + \frac{7}{10}$

$= 0,915625$

$x_2 = \frac{-0,9156}{8} - \frac{3 \times 0,98125}{8} - 1/2 = -0,983$

$x_3 = 0,98388$

Yeah !

LAGRANGE

on a N point, Calculer les N $l(x)$

et apres Faire $x_1 l_1(x_1) + x_2 l_2(x_2) + x_3 l_3(x_3) + \dots$

$$l_k(x_k) = \prod_{i=0,\, i \neq k}^{n} = \frac{x - x_1}{x_k - x_1} \times \frac{x - x_2}{x_k - x_2} \times \frac{x - x_3}{x_k - x_3} \times \dots$$

(1) (2) (3)

Veut dire que pour
(dans le cas ou on a que 3 pts)

$l_1(x_1) = (2) \times (3)$

$l_2(x_2) = (1) \times (3)$

$l_3(x_3) = (1) \times (2)$

si on a 3 pts chaque $l_k(x_k)$ est composé de (3-1) multipl.

ex:

x :	0	2	4
y :	1	5	17

$$L_1(x) = \frac{(x-2)}{(0-2)} \times \frac{(x-4)}{(0-4)} = \frac{x^2 - 4x - 2x + 8}{8} = \frac{x^2 - 6x + 8}{8}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)}{(2-0)} \frac{(x-4)}{(2-4)} = \frac{x^2 - 4x}{4}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-0)}{(4-0)} \frac{(x-2)}{(4-2)} = \frac{x^2 - 2x}{8}$$

$$\boxed{P(x) = 1 L_1(x) + 5 L_2(x) + 17 L_3(x) = 1 + x^2}$$

NEWTON : permet de calculer le polynome associer a une serie de points. C'est une tech d'interpolation

1. Calculer le tableau
2. injecter ds le polynome de Newton
3. dev / ordo / reduire

	x_i	y_i	∇y_1 ($k=1$)	∇y_2 ($k=2$)	∇y_3 ($k=3$)
1	A	B	x a_1	x	x
2	C	D	$\frac{D-B}{C-A}$ i	x a_2	x
3	E	F	$\frac{F-D}{E-A}$ J	$\frac{J-i}{E-C}$ L	x a_3
4	G	H	$\frac{H-F}{G-A}$ K	$\frac{K-J}{G-E}$ M	$\frac{M-L}{G-E}$ N

$\uparrow$
x_i

$$\nabla y_i \rightarrow \frac{y_i - y_k}{x_i - x_k}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \text{Vecteur solution}$$

Polynome pour injection P(x)

$$P(x) = a_1 + (x - x_1) a_2 + (x - x_1)(x - x_2) a_3 + \dots$$

les x_i

ici : $P(x) = i + (x - A) L + (x - A)(x - C) N$

BOUM !

NEVILLE : on nous donne une liste de points qui représente un polynome, neville nous permet de calculer une valeurs entre ces points

	k=0	k=1	k=2
x_1	$P_0[x_1]=y_1$	$P_1[x_1,x_2]$	$P_2[x_1,x_2,x_3]$
x_2	$P_0[x_2]=y_2$	$P_1[x_2,x_3]$	$P_2[x_2,x_3,x_4]$
x_3	$P_0[x_3]=y_3$	$P_1[x_3,x_4]$	X
x_4	$P_0[x_4]=y_4$	X	X

Pour calculer une case, il faut 2 case avant

① → ③
② ↗

$$③ = \frac{(x - x_{i+k}) \times ① + (x_i - x) \times ②}{(x_i - x_{i+k})}$$

* x = la valeur recherché
* x_i = le x de la ligne
- si on calcul sur la ligne 2, $x_i = x_2$

* Calculer y pour $x = 3$

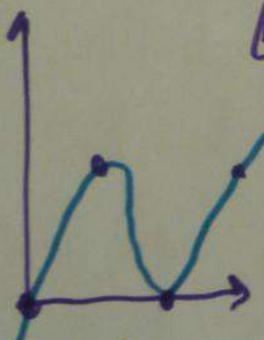
	k0	k1	k2	k3
0 x_1	0	6	3	2
2 x_2	4	2	1	
4 x_3	0	-2		
6 x_4	4			

Pourquoi 3 ?

Car on a injecté 3 dans tous les calcul

Solution

$y=2$ pour $x=3$



x	y
0	0
2	4
4	0
6	4

NEVILLE - DETAIL DES CALCULS

1	2	3
$\frac{(3-2)\times 0+(0-3)\times 4}{0-2}$ 6	$\frac{(3-4)\times 6+(0-3)\times 2}{(0-4)}$ 3	$\frac{(3-6)\times 3+(0-3)\times 1}{(0-6)}$ 2
$\frac{(3-4)\times 4+(2-3)\times 0}{(2-4)}$ 2	$\frac{(3-6)\times 2+(2-3)\times(-2)}{(2-6)}$ 1	X
$\frac{(3-6)\times 0+(4-3)\times 4}{(4-6)}$ -2	X	X

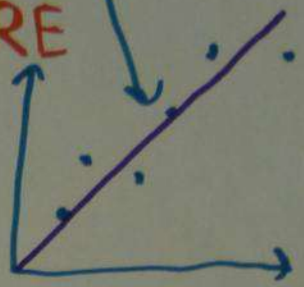
on a injecté 3 dans tous les calcul alors le resultat ou, le bout du tableau, donne $y=2$ pour $x=3$

si on avait injecté 5 on aurait calculer $f(5) = \sim$

APPROXIMATION

Permet de calculer la droite moyenne

REGRESSION LINEAIRE



$$\begin{bmatrix} n & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma y_i x_i \end{bmatrix}$$

$f(x) = a_0 + a_1 x$

on divise tous par n !

$$\begin{bmatrix} 1 & \overline{x} \\ \overline{x} & \overline{x^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{y} \\ \overline{xy} \end{bmatrix}$$

$a_0 = \overline{y} - \overline{x}\, a_1$

$$a_1 = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2}$$

il suffit de multiplier les matrice, sortir les equation et extraire a_0 et a_1

ex :

x	0	1	2	2.5	3
y	2.9	3.7	4.1	4.4	5

$\overline{x} = (0+1+2+2.5+3)/5 = 1.7$

$\overline{x^2} = 4{,}05 = (0^2+1^2+2^2+2.5^2+3^2)/5$

$\overline{y} = (2.9+3.7+4.1+4.4+5)/5 = 4.02$

$\overline{xy} = (0 \times 2{,}9 + 1 \times 3.7 + 2 \times 4.1 + 2.5 \times 4.4 + 3 \times 5)/5 = 7{,}5$

$$a_1 = \frac{7{,}5 - 1.7 \times 4.02}{4.05 - 1.7^2} = 0{,}6431 \qquad a_0 = 4.02 - 1.7 \times 0{,}6431 = 2.9267$$

Yeah !

$$\boxed{f(x) = 2.9267 + 0{,}6431\, x}$$