ALGORITHMIQUE NUMÉRIQUE

Devoir du Vendredi 23 juin 2006

2 H

Tous les documents sont autorisés.

Question 1 (3 points)

En utilisant la représentation des nombres réels vue en TP, effectuer l'addition des nombres `0,0725` et `5,15`. **Détailler les calculs en binaire** (on pourra remplacer de longues suites de 0 par des ...).

Question 2 (5 points)

Déterminer les coefficients du polynôme $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ qui passe par les points `(0,10)`, `(1,35)`, `(3,31)` et `(4,2)` en utilisant le pivot de Gauss, **technique du pivot total**.

Question 3 (4 points)

Inverser la matrice suivante en utilisant le pivot de Gauss (technique au choix) :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix}$$

Vérifier le résultat.

Question 4 (4 points)

Utiliser la méthode d'interpolation de Newton pour trouver l'expression correspondant aux points suivants :

x	-3	2	-1	3	1
y	0	5	-4	12	0

Question 5 (4 points)

À partir des données suivantes, utiliser les splines cubiques (naturelles) afin de calculer y pour `x = 1.5` :

x	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
y	0	1	0	1	0

...OUQUE
Mathieu
L3 gp D

Vendredi 23 juin 2006

DE Algorithmique Numérique

11/2

3,5

Exercice 2

On a

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 = 10$$

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 = 35$$

$$a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3 = 31$$

$$a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 = 2$$

avec $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$

On en déduit directement que $a_0 = 10$ on a donc le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 27 \\ 8 & 16 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 21 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Le plus grand coefficient est 64

$$\begin{pmatrix} 64 & 16 & 8 \\ 27 & 9 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 21 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \\ L_2 - \frac{27}{64} L_1 \\ L_3 - \frac{L_1}{64} \end{array} \begin{pmatrix} 64 & 16 & 8 \\ 0 & \frac{9}{4} & -\frac{3}{8} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{7}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 21 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Le plus grand coefficient est $\frac{7}{8}$

$$\begin{pmatrix} 64 & 8 & 16 \\ 0 & \frac{7}{8} & \frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{3}{8} & \frac{9}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 21 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ L_3 - \frac{3}{7} L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 64 & 8 & 16 \\ 0 & \frac{7}{8} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{18}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 21 \\ -8 \end{pmatrix}$$

P ou :

$a_2 = -8 \times \frac{7}{18} \simeq \cancel{-3,11}$

$\frac{7}{8} a_1 + \frac{3}{4} a_2 = 21 \Rightarrow a_1 = (21 + 2,335) \times \frac{8}{7} \simeq \cancel{26,6}$

$64 a_3 + 8 a_1 + 16 a_2 = 25 \Rightarrow a_3 = (25 + 49,6 - 213,3) \frac{1}{64} \simeq \cancel{-2,16}$

Erreurs de calcul !

Exercice III

4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 12 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 - 2L_2 \\ \\ L_3 - 2L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 & -8 & 3 \\ -\frac{7}{2} & 3 & -5/2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 + 3L_3 \\ L_2 - \frac{5}{2} L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 & -8 & 3 \\ -7/2 & 3 & -5/2 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \; L_3/2$$

↑

Inverse de M par pivot de gauss

Trace A = trace A^{-1}

Exercice 4

2

i	x	y	∇y^1	∇y^2	∇y^3	∇y^4
1	-3	$\boxed{0}^{a_1}$				
2	2	5	$\boxed{1}^{a_2}$			
3	-1	-4	3	$\boxed{-\frac{2}{3}}^{a_3}$		
4	3	12	4	$\frac{1}{4}$	$\boxed{\frac{11}{48}}^{a_4}$	
5	1	0	6	-1	$-\frac{5}{16}$	$-\frac{26}{192} = \boxed{-\frac{13}{96}}^{a_5}$

0 0

$$P_{n-1}(x) = a_1 + (x-x_1)a_2 + (x-x_1)(x-x_2)a_3 + (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)a_4 + (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)a_4$$

$$= 0 + (x+3)1 + (x+3)(x-2)\left(-\frac{2}{3}\right) + (x+3)(x-2)(x+1)\frac{11}{48} + (x+3)(x-2)(x+1)(x-3)\left(-\frac{13}{96}\right)$$

$$P_4(x) = 0 + 3 + x + (x^2 + x - 6)\left(-\frac{2}{3}\right) + (x^3 + 2x^2 - 5x - 6)\frac{11}{48} + (x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18)\left(-\frac{13}{96}\right)$$

Exercice 5

En TP nous avons vu la représentation BCD des nombres réels. Cette représentation est de la forme

Ou

1 bit	12 bits (2 bit, 10 bits)	11 bit
Signe	Signe exposant, Exposant	Mantisse

non

alors que en IEEE 754 simple précision

1 bit	8 bit	23 bit
signe	Exposant	Mantisse

$$0{,}0725 = \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \frac{1}{512} = [0.000100101]_2 = [1.00101 \times 2^{-4}]_2$$

$$5{,}15 = 4 + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} = [101{,}00101]_2 = [1{,}0100101 \times 2^2]_2$$

$0,0725 + 5,15 = [0,00000100101 \times 2^2 + 1,0100101 \times 2^2]$

$= [1,01001110101 \times 2^2]$

$\underline{0}$ | $\underline{101|0000000010}$ | $\underline{01001110101...}$
signe | signe exposant, exposant | mantisse

Question 5

1,5

Nous avons $x_{i+1} - x_i = 1$, on peut donc écrire

$k_{i-1} + 4k_i + k_{i+1} = 6(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1})$

$+ k_1 + 4k_2 + k_3 = 6(y_1 - 2y_2 + y_3)$

$k_1 + 4k_2 + k_3 = 6(0 - 2 + 0) = \underline{-12}$

$+ k_2 + 4k_3 + k_4 = 6(1 - 0 + 1) = \underline{12}$

$+ k_3 + 4k_4 + k_5 = 6(0 - 2 + 0) = \underline{-12}$

avec $k_1 = k_5 = 0$

Oui