

ALGORITHMIQUE NUMÉRIQUE

Devoir du Vendredi 23 juin 2006

2 H

Tous les documents sont autorisés.

Question 1 (3 points)

En utilisant la représentation des nombres réels vue en TP, effectuer l'addition des nombres 0,0725 et 5,15. **Détailler les calculs en binaire** (on pourra remplacer de longues suites de 0 par des ...).

Question 2 (5 points)

Déterminer les coefficients du polynôme $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ qui passe par les points (0, 10), (1, 35), (3, 31) et (4, 2) en utilisant le pivot de Gauss, **technique du pivot total**.

Question 3 (4 points)

Inverser la matrice suivante en utilisant le pivot de Gauss (technique au choix) :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix}$$

Vérifier le résultat.

Question 4 (4 points)

Utiliser la méthode d'interpolation de Newton pour trouver l'expression correspondant aux points suivants :

x	-3	2	-1	3	1
y	0	5	-4	12	0

Question 5 (4 points)

À partir des données suivantes, utiliser les splines cubiques (naturelles) afin de calculer y pour x = 1,5 :

x	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
y	0	1	0	1	0

UUQUE

mathématiques

L3, chap D

Vendredi 23 juillet 2006

DE Algorithmique Numérique

Exercice 2

On a

3,5

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 = 60$$

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 = 35$$

$$a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3 = 31$$

$$a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 = 2$$

avec $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = \frac{7}{4}$

On va déterminer si le système qui $a_0 = 10$ on a donc le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 27 \\ 8 & 16 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 21 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Le plus grand coefficient est 64

$$\begin{pmatrix} 64 & 16 & 8 \\ 27 & 9 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 21 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$L_2 - \frac{27}{64} L_1 \begin{pmatrix} 64 & 16 & 8 \\ 0 & \frac{4}{4} & -\frac{3}{8} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 21 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Le plus grand coefficient est $\frac{7}{8}$

$$\begin{pmatrix} 64 & 8 & 16 \\ 0 & \frac{7}{8} & \frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{3}{8} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 21 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$L_3 - \frac{3}{7} L_2 \begin{pmatrix} 64 & 8 & 16 \\ 0 & \frac{7}{8} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{18}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 21 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Dsu :

$$a_2 = -8 + \frac{2}{7} \approx -3,14$$

$$\frac{7}{8}a_1 + \frac{3}{4}a_2 = 21 \Rightarrow a_1 = (21 + 3,335) \cdot \frac{8}{7} \approx 26,6$$

$$64a_3 + 8a_1 + 16a_2 = 25 \Rightarrow a_3 = (25 + 4,6 - 21,6) \cdot \frac{1}{64} \approx -0,16$$

Erreur de calcul !

Exercice III

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_2 + L_1$
 $L_3 + L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_1 - 2L_2$
 $L_3 - 2L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -8 & 3 \\ -\frac{3}{2} & 3 & -\frac{5}{2} \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_1 + 3L_3$
 $L_2 - \frac{5}{2}L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -8 & 3 \\ -\frac{3}{2} & 3 & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$L_3 / 2$



Inverse de N par
pivot de gauss

Trou A = trou A⁻¹

Exercice 4

	x	y	∇_1^1	∇_1^2	∇_2^1	∇_2^2	
1	-3	0					2
2	2	5	1				
3	-1	-4	3	$-\frac{2}{3}$			
4	3	12	4	$\frac{1}{4}$		0	
5	1	0	6	-1	$\frac{49}{48}$	$-\frac{26}{96}$	
					$\frac{5}{76}$	$\frac{-13}{192}$	$\frac{93}{96}$

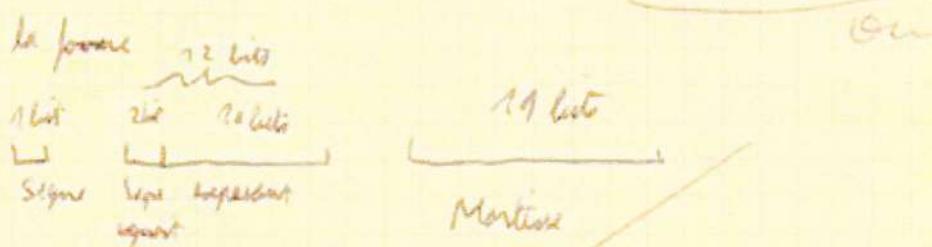
$$P_{n=4}(x) = a_1 + (x - x_1)a_2 + (x - x_1)(x - x_2)a_3 + (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)a_4 \\ + (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)a_4$$

$$= 0 + (x+3)1 + (x+3)(x-2)\left(\frac{49}{48}\right) + (x+3)(x-2)(x-1)\frac{11}{48} - (x+3)(x-1) \\ (x-3)\left(-\frac{13}{96}\right)$$

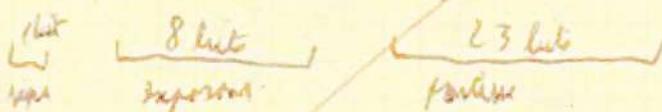
$$P_4(x) = 0 + 3 + x + (x^2 + x \cdot 6)\left(-\frac{2}{3}\right) + (x^3 + 2x^2 - 5x - 6) \frac{11}{48} + \\ (x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18)\left(-\frac{13}{96}\right)$$

Exercice 5

En TPC nous avons une représentation BCD des nombres réels. Cette représentation utilise la forme 12 bits



Donc que au format IEEE754 simple précision



$$0,0725 = \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \frac{1}{512} = [0.000100101]_2 = [1.00101 \times 2^{-4}]_2$$

$$5,15 = 4 + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} = [101,00101]_2 = [1.0100101 \times 2^4]_2$$

$$0,6725 + 5,15 = [0,00000100101 \times 2^2 + 0,0100101 \times 2^4] \\ = [1,01001110101 \times 2^4]$$

101100000001 0100110001..
Nipke Nipke Knoblauch
Nipke Nipke Knoblauch

Question 5

Now since $x_1 + x_2 - x_3 = 1$, we must have $x_3 = 0$

$$k_{i-1} + k_i + k_m = 6 \quad (y_{i-2} y_i + y_{i+1})$$

$$+ k_1 + 4k_2 + k_3 = 6 (y_1 - 2y_2 + 3y_3)$$

$$k_1 + 4k_2 + k_3 = 6(0 - 2 + 0) = \underline{-12}$$

$$+ h_2 + 4h_3 + h_4 = 6(1 - 0 + 1) = 12$$

$$+ h_3 + 4h_4 + h_5 = 6(0 - z + 0) = -12$$

$$a_i \in C \quad k_i = k_C = 0$$

115