/

eFrei

ALGORITHMIQUE NUMÉRIQUE

WAKIM Marie Grpe B 10,75/20

L3 - DEVOIR DU MARDI 10 AVRIL 2012

2H

Sans document. Sans calculatrice.

Attention à la gestion de l'espace : toutes vos réponses doivent être consignées directement sur la feuille d'énoncé dans les cadres réservés.
Aucune autre copie ne sera prise en compte.

Vous disposez d'un formulaire en annexe.

Questions (5 pts)

1/ Quelles sont les deux grandes classes d'algorithmes numériques ? Donner un exemple pour chacune.

1ère classe : par les matrices (modélisation matricielle), où nous distinguons deux méthodes :
→ directes : pivot de Gauss
→ itératives : Jacobi, Gauss-Seidel

0

2nd classe : modélisation polynomiale
exemple : Lagrange, Newton, Neville.

2/ On souhaite résoudre un système d'équations linéaires en utilisant une méthode directe. Le déterminant de la matrice A, caractéristique du système, est différent de 0 mais très proche. Que suggérez-vous (détaillez votre raisonnement) ?

Le déterminant de A étant très proche de 0, il y a un risque d'instabilité important.

Et donc ?...

0,25

On peut faire intervenir ε qui sera l'erreur relative de notre système.

3/ Comment vérifier a priori qu'un système d'équation linéaire peut être résolu par une méthode itérative ?

2 méthodes :

- vérifier que le rayon spectral est < 1
- Théorème de la diagonale dominante

$$\forall i : |A_{ii}| > \sum_{j \neq i} |A_{ij}|$$

1

cette vérification est suffisante mais pas nécessaire, en effet une méthode itérative peut converger sans que la matrice vérifie cette propriété. Mais si la matrice vérifie la propriété, nous sommes sûrs de converger.

1

4/ Peut-on inverser une matrice en utilisant la méthode de Gauss avec pivot partiel ? Si oui, expliquez comment. Si non, expliquez pourquoi.

Soit A la matrice.

Il faut que A soit une matrice carré.

$\boxed{\text{Oui}}$

La formule : $AA^{-1} = I$, permet de trouver la matrice inverse A^{-1}.

1

Or A^{-1} peut être décomposer en vecteurs : $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & \\ x_2 & y_2 & \cdots \\ x_3 & y_3 & \\ \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$

Nous avons donc à calculer pour toutes les colonnes : $A.\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = I$, puis $A.\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = I$, etc

C'est-à-dire effectuer un pivot de Gauss sur chaque colonne et rien ne nous en empêche.

5/ Quelle méthode d'interpolation peut-on utiliser pour approximer le zéro d'une fonction f ? Comment ? Quelles doivent être alors les hypothèses sur f ?

A

Nous pouvons peut-être passer par la méthode des moindres carrés.

0

Exercice 1 (5 pts)

1/ Calculez la valeur, en base 10, du nombre réel C2E14000 (codé en hexadécimal) selon la représentation IEEE754 simple précision ? Détaillez les calculs.

C 2 E 1 4 0 0 0

1100 0010 1110 0001 0100 0000 0000 0000

$\underbrace{1}_{S}$ $\underbrace{10000101}_{E = 8 \text{ bits}}$ $\underbrace{11000010100000000000000}_{M = 23 \text{ bits}}$

$E = 133$

La formule est : $(-1)^S (1+M)_2\, 2^{E-127}$

D'où : $x = (-1)^1 (1+0{,}11000010100\ldots0)_2\, 2^6$

$\Leftrightarrow x = -(1110000{,}101)_2$

$\Leftrightarrow \boxed{x = -112{,}625}$

2

2/ Expliquer la notion de nombre réel dénormalisé dans le cadre de la représentation IEEE754. Donner la valeur binaire du plus petit nombre normalisé positif représentable en simple précision puis un exemple de nombre dénormalisé positif de valeur inférieure.

Un nombre est dénormalisé quand $E = 0$.
~~et~~ le premier chiffre de la mantisse $\neq 0$.

?

Le plus petit nombre représentable est : $\boxed{2^{-126}}$ $E = 1$

2^{-127} est inférieur à 2^{-126} et dénormalisé. mais codé ?

0,5

Exercice 2 (5pts)

Exprimer la fonction f décrite par les trois points suivants sous forme quadratique, en utilisant la méthode de Lagrange :

x	-4 x_1	0 x_2	4 x_3
$f(x)$	0	-24	16

Calcul des $l_i(x)$:

$$l_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{x - x_3}{x_1 - x_3} = \frac{x(x-4)}{32}$$ inutile

$$l_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x - x_3}{x_2 - x_3} = \frac{(x+4)(x-4)}{-16}$$

$$l_3(x) = \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} = \frac{(x+4)x}{32}$$

4

Calcul de $P_n(x)$

$f(x) = P_2(x)$: $P_2(x) = \frac{x(x-4)}{32} \times 0 + \frac{(x+4)(x-4)}{16} \times 24 + \frac{(x+4)x}{32} \times 16$

$\Leftrightarrow P_2(x) = (x+4)(x-4)\frac{3}{2} + (x+4)x \cdot \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow P_2(x) = \frac{1}{2}(x+4)\left((x-4)3 + x\right)$

$\Leftrightarrow \boxed{P_2(x) = \frac{1}{2}(x+4)(4x-12)} = 2x^2 + 2x - 24$

Exercice 3 (5 pts)

Ecrire un algorithme (en langage algo ou C) qui donne les coefficients de la courbe issue de l'application d'une régression linéaire sur un nuage de points de taille quelconque.

Régression linéaire : approximation polynomiale par un polynôme de degré 1.

$\overline{x}$: moyenne des x

fonction (tableau des x, tableau des y)

{

Début

Calcul de : $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{x}.\overline{y}$, $\overline{xy}$, $\overline{x}^2$, $(\overline{x})^2$.

Puis calcul de $a_1 = \dfrac{\overline{xy} - \overline{x}.\overline{y}}{\overline{(x^2)} - (\overline{x})^2}$

Puis $a_0 = \overline{y} - a_1 \overline{x}$

~~Pour x allant de 0 à n~~

~~Calculer $f(x) = a_0 + a_1 x$~~

~~Insérer f(x) dans un tableau T~~

~~Retourner T~~

Fin

}

Détaillez un peu

2

T contient les différentes valeurs de f(x), nous aurions pu aussi retourner f(x) et effectuer les calculs dans une autre fonction ; l'exploiter ailleurs.