NOM DIALLO

Prénom Alpha

Promo 2018

Date 24/05/16

14,00

DIALLO Alpha Oumar
L3 - 2015

MATIÈRE Algorithme Numérique

Exercice 2 :

04/5

1 - Dans le pivot partiel ~~sert~~ on permute les lignes entre elles alors que dans le pivot total on peut permuter non seulement les lignes mais aussi les colonnes. 1

2 - Le pivot partiel est plus avantageux que le pivot classique. Avec le pivot partiel en une étape nous pouvons annuler toute une colonne alors que le classique demande plus d'étapes.

3 - Résolvons le système :

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 11 \\ -2 & 1 & 0 & -4 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 4 & 11 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} l_2 \leftarrow l_2 + \frac{1}{2} l_1 \\ l_3 \leftarrow l_3 - \frac{1}{2} l_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 5/2 & 4 & 9 \\ 0 & 5/2 & -1 & 4 \end{array}\right] l_3 \leftarrow l_3 - l_2 \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 5/2 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}$$

$-5x_3 = -5 \Rightarrow \boxed{x_3 = 1}$

$\frac{5}{2}x_2 + 4x_3 = 9 \Rightarrow \boxed{x_2 = 2}$

$-2x_1 + x_2 = -4 \Rightarrow \boxed{x_1 = 3}$

Vérification : $1(3) + 2(2) + 4(1) = 11$ Vrai

$\frac{03,5}{04}$

Exercice I : norme $IEEE_{754}$ simple précision :

1 bit de signe + 8 bit exponentiel + 23 bits Mantisse

Formule $IEEE_{754}$: $(-1)^S \times (1+M) \times 2^{E-127}$

$-11,25 = -(11,25) \times 2^{E-127} = -(1011,01)_2 \times 2^{E-127}$

$-11,25 = -\cancel{(1,01101 \times 10^3)}_2 = -(1,01101)_2\, 2^3$

$3 = 130 - 127 \Rightarrow E = 130$

Donc : $-(1,01101)_2\, 2^{130-127}$

$\Rightarrow 130_{10} = (1000\ 0010)_2$

Donc $-11,25 = (1\ \ 1000\ 0010\ \ 01101000\ 0000\ 0000\ 0000\ 000)_{IE}$

2 _ La valeur en décimale de :

$\underline{1}\ \underline{10000010}$, 01100000000000000000000

$\Rightarrow$ -1 $\quad$ 130

$\Rightarrow -(1,0110\ldots)_2\, 2^3$

$= -(1011)_2 = -11$ ✓

3/06

Exercice 3 :

le polynôme d'interpolation $P_{n-1}(x)$ de n points (x_i, y_i) doit vérifier pour chaque x_i la valeur de y_i.

1

L'expression du polynôme d'interpolation de lagrange pour les trois points du plan $(1,1)$, $(2,0)$ et $(3,2)$.
- nous devons d'abord calculer les $l_i(x)$.

$$l_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{x - x_3}{x_1 - x_3} = \frac{x-2}{1-2} \cdot \frac{x-3}{1-3} = (2-x)\frac{(3-x)}{2}$$

$$y_1 l_1(x) = (2-x)\frac{(3-x)}{2}$$

$$l_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x - x_3}{x_2 - x_3} = \frac{x-3}{2-3} \cdot \frac{x-1}{2-1} = (3-x)(x-1)$$

$$y_2 l_2(x) = 0$$

$$l_3(x) = \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} = \frac{x-2}{3-2} \cdot \frac{x-1}{3-1} = (x-2)\frac{(x-1)}{2}$$

$$y_3 l_3(x) = 2 \cdot (x-2)\frac{(x-1)}{2} = (x-2)(x-1)$$

$$\Rightarrow P_2(x) = (x-2)\frac{(x-3)}{2} + 0 + (x-2)(x-1)$$

$$= (x-2)\frac{(x-3)}{2} + (x-2)(x-1) = (x-2)\left[\frac{(x-3)}{2} + (x-1)\right]$$

Vérification : Pour $x = 1 \Rightarrow P_2(x) = (1-2)\left[\frac{(1-3)}{2} + 0 = -1\left(\frac{-2}{2}\right)\right.$

$x = 1 \Rightarrow P_2(1) = 1 \Leftrightarrow y = 1$.

Questions de cours :

1 - L'algorithme de résolution de système linéaire de Gauss-Seidel converge si la matrice est à ~~dominant~~ diagonale dominante.

2 - les méthodes d'interpolation polynomiale peuvent parfois provoquer des oscillations. Aussi il ne s'applique que pour des phénomènes discrets. Quand il y'a du bruit il vaut mieux utiliser une méthode d'approximation linéaire.

3 - la régression linéaire est une méthode d'approximation. Elle permet de décrire un phénomène de manière très approchée ~~tout~~ et de supprimer les bruits. Exemple : Méthode des moindres carrés.
Utilisé pour des phénomènes très aléatoires.

4 - le conditionnement d'un problème permet d'avoir un état stable. Plus le conditionnement est proche de un(1), plus le système est stable.

03,5
05

NOM LACHKAR

Prénom Jérémie

Promo 2018

Date 24/05/2016

19,50

LACHKAR Jérémie
L3 - 2015

MATIÈRE Algorithmique numérique

04,50 / 05

Questions de cours

1/ L'algorithme de Gauss-Seidel qui résoud le système $Ax = B$ converge si :

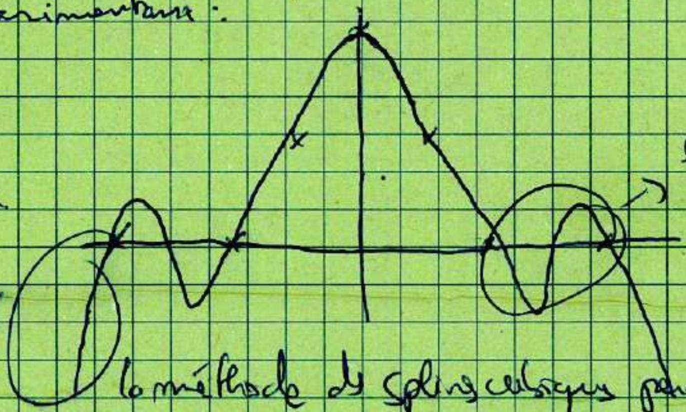
A est diagonale dominante, c'est-à-dire que $\forall i,\ a_{ii} > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$

ou si A est symétrique définie positive, pour tout B et tout premier point x_0

2/ Les limites de l'interpolation polynomiale sont :

- le fait que le polynôme peut osciller "aléatoirement" entre 2 valeurs ~~expériment~~ expérimentales dont ~~l'ordonnée~~ les ordonnées sont pourtant proches
- le polynôme effectue des extrapolations hasardeuses et loin de la forme globale des points expérimentaux.

extrapolation dangereuse



~~extra~~ oscillations hasardeuses alors que les deux points ont la même ~~abscisse~~ ordonnée.

La méthode des splines cubiques permet une amélioration de ces problèmes.

3/ Une régression linéaire est une approximation polynomiale par un polynôme de degré 1. Une approximation est une courbe épousant au mieux la forme globale du nuage ~~p~~ de points expérimentaux. Une régression linéaire est donc une droite dont la moyenne de la distance entre cette droite et les points est minimum : c'est le principe de la méthode des moindres carrés, utilisée pour trouver cette droite.

4/ Un problème bien conditionné signifie que de petites variations des données expérimentales numérique
entraînent de petites variations des résultats finaux.

Un problème mal conditionné est dit instable, c'est à dire qu'au fur et à mesure des ~~étapes~~ opérations numériques appliquées pour résoudre le problème, les erreurs vont grandement s'amplifier. Il s'agit par exemple d'erreurs liés aux troncatures qu'effectuent les machines pour stocker des grands nombres. Si ce erreurs sont grandement amplifiés au fur et à mesure de l'algorithme, ~~et~~ de résolution du problème numérique, on dira que c'est un algorithme instable (exemple d'erreur : la non réception de missile à grande vitesse liés d'une ~~erreur~~ toute petite erreur a entraîné un grand décalage de position car la vitesse ~~était~~ était grande, et ~~28~~ 28 morts...)

Exercice 1

04/04

$$-11{,}25 = -(2^3 + 2^1 + 2^0 + \frac{1}{2^2})$$

$$= -(1011{,}01)_2$$

$$= -(1{,}01101) \times 2^3$$

• en IEEE 754, l'exposant est décalé de 127, qui sera donc de $127+3 = 130$
$= 2^7 + 2^1$

• le signe est de 1 (pour le ⊖)

on a donc :

$$\underbrace{1}_{\text{signe}}\ \underbrace{1\,0\,0\,0\ 0\,0\,1\,0}_{\text{exposant}}\ 0\,1\,1\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0$$

en hexadécimal : 1100 0001 0011 0100 0000 0000 0000 0000

$= 0x$ C 1 3 4 0 0 0 0

$= 0xC1340000$

2/ 1 10000010 0110.....

signe : 1 : negatif ;

exposant : $2^7 + 2^1 = 130$, donc décalé de 127 ça fait $\underline{\underline{3}}$ (comme dans le precedent)

~~mantisse : 011000~~ .....

$= -2^3 \times (1,0110\ldots)_2$

$\cancel{=} = -8 \times (1 + 2^{-2} + 2^{-3})$

$= -8 \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right)$

$= -8 - 2 - 1 = \underline{\underline{-11}}$

05/05

Exercice 2

1/ La methode du pivot partiel se contente de "chercher" le plus grand pivot (en valeur abs) sur la colonne k (du pivot actuel), et d'échanger seulement les lignes, pour mettre ce maximum en nouveau pivot. ~~Le pivot total~~ Dans le pivot total, on cherche, dans la sous matrice inferieur droite au pivot k ~~en~~ en cours, le plus grand $|A_{ij}|$ ~~...~~. On echangera ensuite les lignes (comme dans le pivot partiel) MAIS AUSSI les colonnes, pour placer ce maximum $|A_{ij}|$ en nouveau pivot pour continuer les calculs. En échangeant les colonnes, on modifie l'ordre des variables, il faudra donc retenir ce changement à la solution (le "remettre" remarque").

2/ le pivot classique ne peut pas fonctionner si on se retrouve avec un élément nul ou ~~...~~ vide (ε) sur la diagonale. En effet l'operation $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{ik}}{pivot} L_k$ ~~pour~~ $\forall i$ en dessous du pivot de la ligne k est impossible si le pivot est nul. L'idée du pivot partiel est que l'échange de 2 lignes dans un système linéaire ne change pas les solutions. On va donc chercher le plus grand ~~...~~ $|A_{ik}|$ (~~...~~ pour $i > k$, k étant la ligne du pivot), et échanger la ligne de ce plus grand $|A_{ik}|$ avec celle d'avant.

3)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 11 \\ -2 & 1 & 0 & -4 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right] \quad L_2 \Leftrightarrow L_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 4 & 11 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - \left(\frac{1}{-2}\right) L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \left(\frac{-1}{-2}\right) L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 5/2 & 4 & 9 \\ 0 & 5/2 & -1 & 4 \end{array}\right] \quad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{5/2}{5/2} L_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc} -2 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 5/2 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right]$$

donc $-5x_3 = -5 \Leftrightarrow x_3 = 1$

$\frac{5}{2} x_2 + 4 \times 1 = 9$

$\Leftrightarrow \frac{5}{2} x_2 = 9 - 4 = 5$

$\Leftrightarrow x_2 = 2$

et $-2x_1 + 1 \times 2 + 0 \times 1 = -4$

$\Leftrightarrow -2x_1 = -6$

$\Leftrightarrow x_1 = 3$

le vecteur solution est donc $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

06/06

Exercice 3 (/6)

Par définition d'une interpolation, celle-ci doit passer par tout les points experimentaux (x_i, y_i). Donc, $P_{n-1}(x_i) = y_i$, $\forall x_i$

1

$P_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \, l_i(x)$.

Prenons un exemple explicatif: avec 3 points.

Soit le $P_{n-1}(x) = y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + y_3 l_3(x)$

évaluons en x_1 : $P_{n-1}(x_1) = y_1 l_1(x_1) + y_2 l_2(x_1) + y_3 l_3(x_1)$

NOM

Prénom

Promo

Date

MATIÈRE

Voyons ce que vaut $l_1(x_1)$:

$$l_1(x_1) = \prod_{j=1, j\neq i} \frac{x_1 - x_j}{x_1 - x_j}$$; quelque soit j, cet tout les termes vaudront 1 car il n'y aura pas de terme $\frac{x_1 - x_1}{x_1 - x_1}$ (car j ne peut pas valoir i = 1)

donc $l_1(x_1) = 1$

Maintenant que vaut $l_2(x_1)$

$$l_2(x_1) = \prod_{j=1, j\neq i} \frac{x_2 - x_j}{x_1 - x_j} = \left(\frac{x_2 - x_2}{x_1 - x_2}\right)\left(\frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3}\right)$$

s'annule.

Il en va de même pour $l_3(x_1)$

On ~~remarque~~ que finalement $l_i(x_j) = \begin{cases} 0 & si\ i \neq j \\ 1 & si\ i = j \end{cases} = \delta_{i,j}$ 2

donc, revenons à notre exemple avec x_1 :

$$P_{n-1}(x_1) = y_1 \underbrace{l_1(x_1)}_{1=1 \Rightarrow =1} + y_2 \underbrace{l_2(x_1)}_{2\neq 1 \Rightarrow =0} + y_3 \underbrace{l_3(x_1)}_{3\neq 1 \Rightarrow =0}$$

$$= y_1 \times 1 + y_2 \times 0 + y_3 \times 0$$

$= y_1$: ça vérifie bien la condition.

Le raisonnement est analogue quelque soit le nombre de points. 3

2) Calculons l'interpolation pour les 3 points $(1,1)$, $(2,0)$, $(3,2)$:

Commençons par calculer les l_i

$$l_1(x) = \left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2}\right)\left(\frac{x - x_3}{x_1 - x_3}\right) = \left(\frac{x-2}{-1}\right)\left(\frac{x-3}{-2}\right) = (x^2 - 5x + 6)\frac{1}{2}$$

$$l_2(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)\left(\frac{x - x_3}{x_2 - x_3}\right) = \left(\frac{x-1}{1}\right)\left(\frac{x-3}{-1}\right) = -(x^2 - 4x + 3)$$

$$l_3(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_3 - x_1}\right)\left(\frac{x - x_2}{x_3 - x_2}\right) = \left(\frac{x - 1}{2}\right)\left(\frac{x - 2}{1}\right) = \left(x^2 - 3x + 2\right)\frac{1}{2}$$

$$P(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - 5x + 6\right) + 0 \times l_2(x) + 2 \times \frac{1}{2}\left(x^2 - 3x + 2\right)$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{5}{2}x + 3 + x^2 - 3x + 2$$

$$= \frac{3}{2}x^2 - 5{,}5x + 5$$