

Algorithmique Numérique

Q2)

La matrice est considérée comme mal conditionnée, le message d'erreur est accompagnée d'une estimation de l'inverse du conditionnement ($cond(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$) nommé RCOND.

On peut voir d'autant le plus que le déterminant est très faible et la valeur de conditionnement est très importante. En effet, plus elle est grande et plus le système sera instable.

Le système 1 étudié dans la question est le mieux conditionné, on peut le voir puisque C1 est proche de 1, et on remarque aussi l'influence d'une variation de 1 %. Avec le premier système, on a des valeurs très proches, alors qu'avec le second modèle, ces valeurs sont plus éloignées des valeurs originelles.

Q4)

On obtient les valeurs pour n1, n2, n3 suivantes :

N1 = 4, N2 = 10, N3 = 40. On ajoute deux variables comme ci-dessous :

```
n=5; n1=0;n2=0;n3=0;val1 = 0, val2=0;
for k=1:n-1
    n1=n1+1;
    for i=k+1:n
        Lambda=A(i,k)/A(k,k); n2=n2+1; i;
        for j=k:n
            A(i,j)=A(i,j)-Lambda*A(k,j);
            n3=n3+1; j;
            At=A
            val2=val2+1
        end
        Y(i)=Y(i)-Lambda*Y(k); Yt=Y
        val1=val1 +1
    end
end
```

On obtient val2 =40 soit 40 itérations pour calculer At et val1=10 soit 10 itérations pour le calcul de Yt. En calculant cinq puissance trois divisé par trois, on obtient 41.6. ce qui est proche de la complexité obtenue (égal à 40, nombre maximal d'itération).

Q5)

Le vecteur X est le suivant :

X =

0.4204
0.3405
0.4915
0.3405
0.4204

On obtient $N_4 = 10$. La résolution nécessite donc 50 (10 +40) itérations.

Q6)

En modifiant Triangle.m , on résous le système par inversion de la matrice A' . On peut remarquer que la valeur de conditionnement est élevé (11.8997), d'autre part la valeur du déterminant (-0.1041) est très faible, ce qui indique un risque d'instabilité.

On observe une erreur NaN, ce qui signifie que le resultat n'est pas un nombre.

On observe que 'b' n'est pas défini, il est donc une source d'erreur. On corrige simplement l'erreur en remarquant que la ligne n'intervient pas dans le calcul, et donc en la supprimant ou en la mettant en commentaire. Le calcul s'effectue donc normalement.

Q8)

$A = M - N$ avec

$M = D$ (diagonale)

$N = L+U$ (triangle inferieur + triangle supérieur)

L'algorithme de Jacobi ne converge pas vers 0 puisque selon le théorème « **Théorème** : Une condition nécessaire et suffisante pour que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|B^k\| = 0$ est que le rayon spectral (plus grande valeur propre en valeur absolue) de B soit strictement inférieur à 1. »

En regardant les valeurs propres , on s'aperçoit que la condition n'est pas respecté

Les valeurs propres sont :1.0, 1.6, 4.55, -0.6455, 0.5 et 0.0.

Q9) On a $M = D - U - A$ et $N = U + L$

On relève la solution :

$x_{ja} =$

0.4203
0.3408
0.4900
0.3412
0.4203

Xgs =

0.4226

0.3421

0.4883

0.3412

0.4203

On observe les valeurs propres suivantes : 1.0, 1.6455, -0.6455, 0.50, 0.0. La convergence se justifie puisque l'erreur va la valeur d'eps qui elle vaut $((\text{norm}(X-X_0))/\text{norm}(X))$. On peut facilement voir si la convergence vers 0.

L'algorithme nécessite environ 6 itérations pour converger vers 0. La précision atteinte est de 10^{-4} .

Q10)