I. RESOLUTION DE SYSTEMES PAR LES METHODES ITERATIVES

Q12.

A = M - N avec

M = D (diagonale), ici :

$$D = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

et N = L+U (triang. inf.+sup.) , ici :

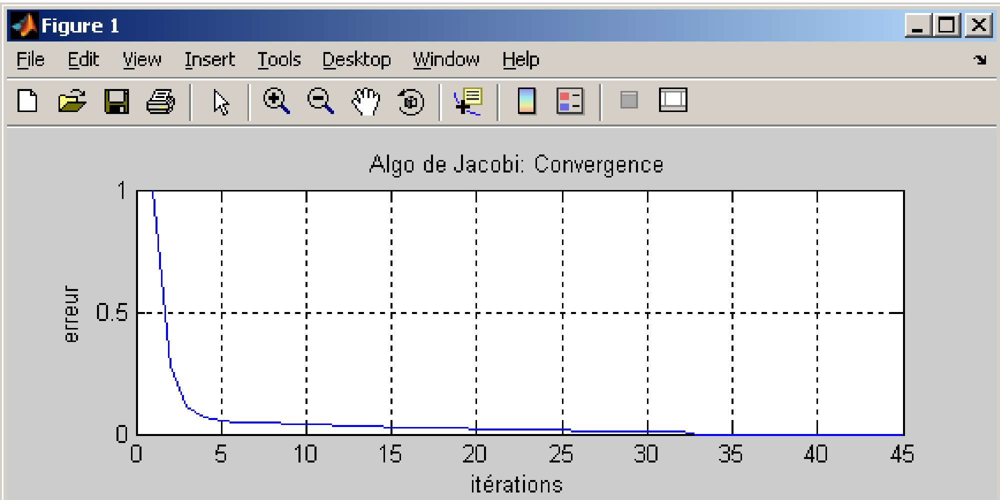
$$L = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0625 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.125 & -0.0625 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.125 & 0.0625 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.25 & -0.125 & -0.0625 & 0 \end{matrix}$$

$$U = \begin{matrix} 0 & -0{,}5 & -0{,}25 & -0{,}125 & -0{,}0625 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}125 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}5 & -0{,}25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Voici la solution :

$$x_0 = \begin{matrix} 2.0785 \\ -3.5989 \\ 4.1430 \\ -2.5667 \\ 0.5301 \end{matrix}$$

32 itérations (nj) ont été nécessaires à cette opération et une erreur (eps) de 0.0094 soit une précision à 0,0094 près.



Le taux d'erreur décroît très rapidement jusqu'à être minimum voir nul en zéro.

Méthode de Jacobi	Méthode du pivot de Gauss
$x_0 = \begin{matrix} 2.0785 \\ -3.5989 \\ 4.1430 \\ -2.5667 \\ 0.5301 \end{matrix}$	$x = \begin{matrix} 2.0645 \\ -3.6129 \\ 3.8626 \\ -2.0479 \\ 0.5161 \end{matrix}$

On remarque qu'avec la méthode du pivot de Gauss, nous obtenions des valeurs pratiquement identiques, en moyenne légèrement plus faibles. Devant la proximité de ces valeurs, on peut considérer, dans notre cas, que les méthodes sont équivalentes.

De plus, nous devions effectuer 10 itérations avec le pivot de Gauss, ici 32, mais les opérations

Jacobi est un algorithme rapide mais très peu précis (avec un degré d'erreur élevé) alors que Gauss est plus précis mais demande plus d'itérations.

Q14.

$$\begin{aligned} Mx^{(k+1)} &= Nx^{(k)} + b \\ x^{(k+1)} &= M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b \end{aligned}$$

Méthodes itératives

Jacobi

- A = M - N avec M = D (diagonale) et N= L+U (triang. inf.+sup.)

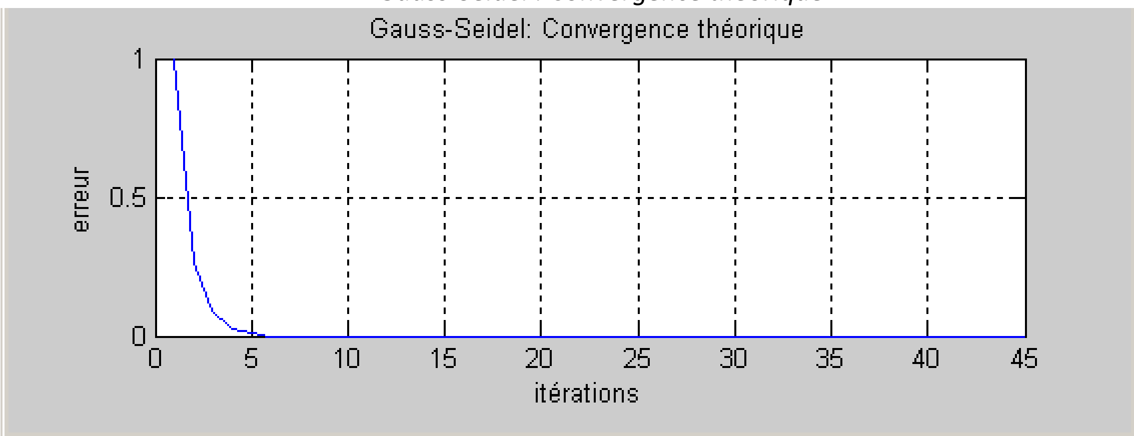
$$x^{(k+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/A_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/A_{nn} \end{bmatrix}}_{M^{-1}=D^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & & -A_{1j} \\ & \ddots & \\ -A_{nj} & & 0 \end{bmatrix}}_{N=L+U} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/A_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- D'où l'expression (itérative) des éléments du vecteur $x^{(k+1)}$

$$\boxed{x_i^{(k+1)} \leftarrow \frac{1}{A_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} A_{ij} x_j^{(k)} \right), \ i = 1, 2, \ldots, n}$$

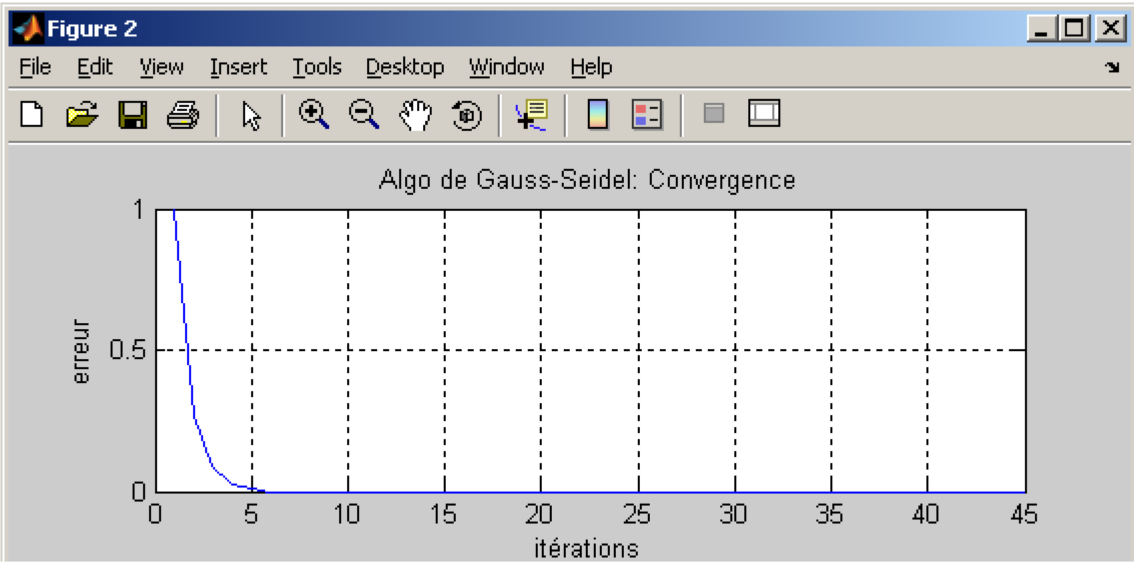
Voici les différents résultats que nous obtenons :

Gauss-Seidel : Convergence théorique



On remarque que l'algorithme ici représenté converge bien plus vite. Le taux d'erreurs décroît plus rapidement : il est nul au bout d'à peine 6 itérations.

Gauss-Seidel : Convergence

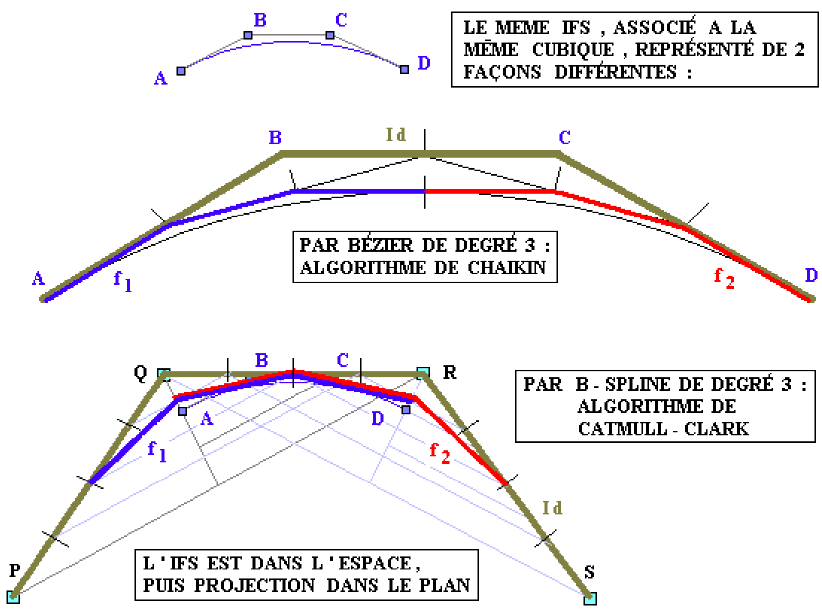


On remarque que l'algorithme ici représenté converge lui aussi très rapidement. Le taux d'erreurs est nul aussi dès 6 itérations.

II. INTERPOLATION POLYNOMIALE

Q15.

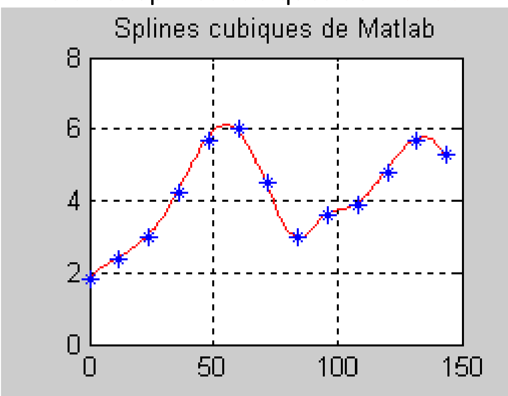
On effectue l'interpolation par splines cubiques lorsque l'on recherche à interpoler sur un segment [a,b] une fonction f par un polynôme P. Si l'on recherche un polynôme P tel qu'en certains points a_i on ait $P(a_i) = f(a_i)$, alors un des problèmes apparaît. Il s'agit du phénomène de Runge : même en faisant augmenter le nombre de points d'interpolation, on effectue une approximation globale qui est parfois mauvaise. De plus, dans ce cas le calcul de P devient complexe, et peut donner lieu à des erreurs d'arrondi.



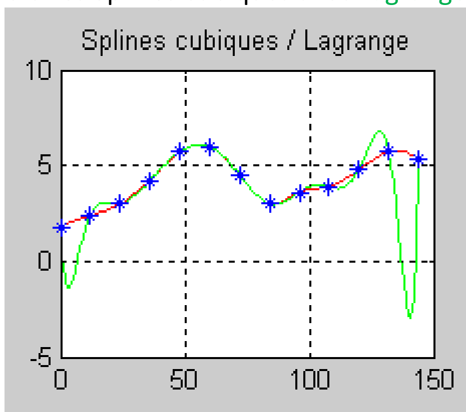
Source : http://www2.ac-lille.fr/

Les variables utilisées sont les années avec les valeurs boursières correspondantes.

Voici les Splines cubiques de Matlab :



Voici les Splines cubiques avec Lagrange :



On observe que la courbe de Lagrange suit parfaitement celle d'origine, mais aux points extrêmes (mois 0 et 150) elle s'éloigne totalement des points désirés.
Il s'agit ici du phénomène dit de « bords », il s'agit d'un phénomène d'instabilité numérique aux bords de l'intervalle d'étude. Lorsque l'on tente de calculer une solution approchée à l'interpolation, on ne parvient pas à avoir une bonne approximation au bord : c'est le phénomène de Runge dont nous parlions précédemment.

Le polynôme est de degré compris entre 0 et 12, puisqu'il va de 0 (lorsque tous les coefficients sont nuls) jusqu'au nombre de valeurs-1 (13-1=12).

Q17. Validée

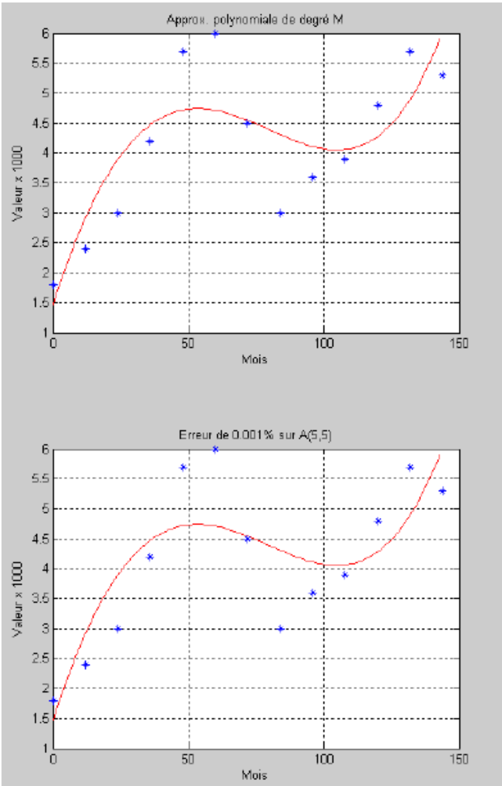
III. APPROXIMATION POLYNOMIALE : REGRESSION

Q18.

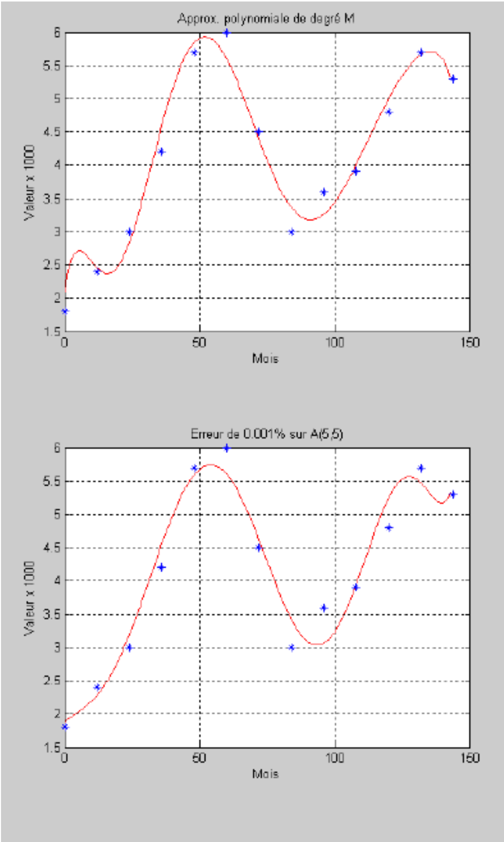
Q19.

Différentes valeurs de M :

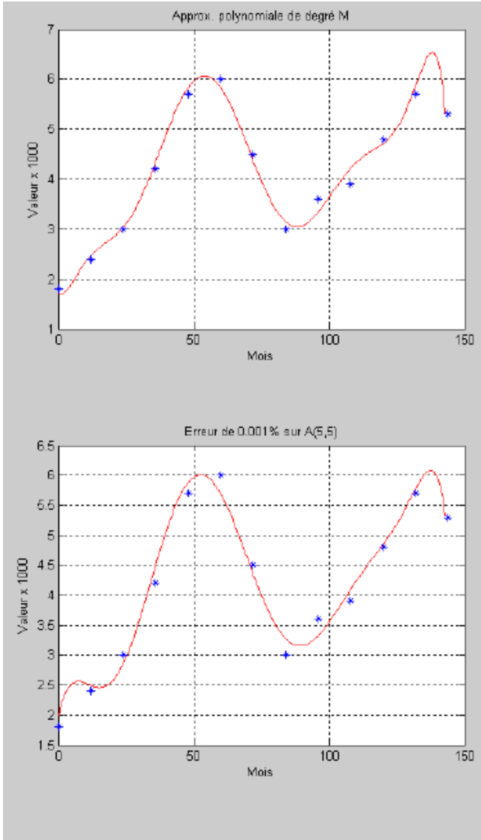
M=4



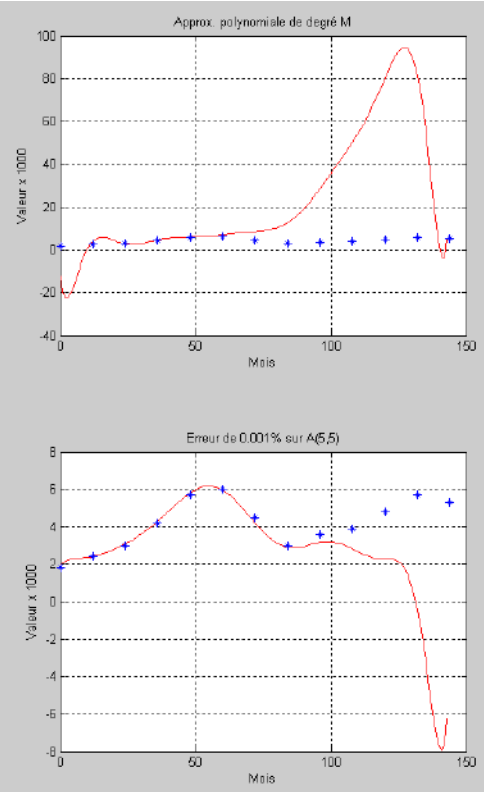
M=8


Approx. polynomiale de degré M
Valeur x 1000
Mois
Erreur de 0.001% sur A(5,5)
Valeur x 1000
Mois

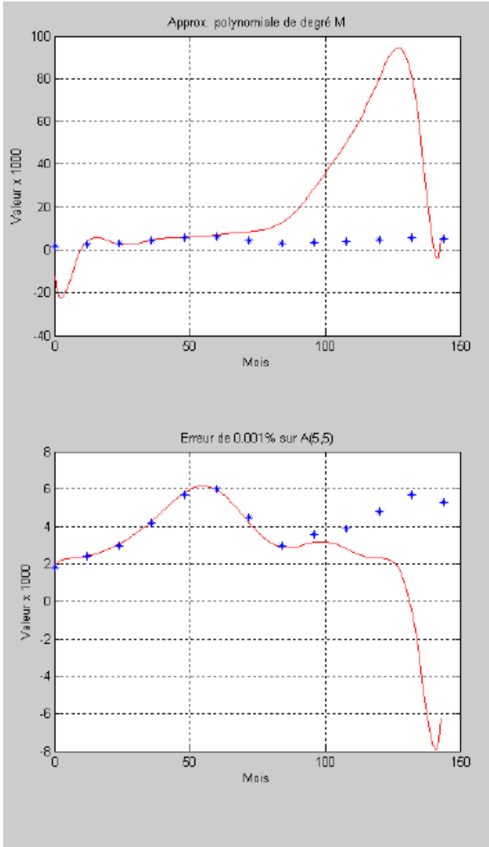
M=9


Approx. polynomiale de degré M
Valeur x 1000
Mois
Erreur de 0.001% sur A(5,5)
Valeur x 1000
Mois

M=10



M=12



La plus proche valeur est celle obtenue pour **M=9.**