1 Chap 1 Transmission en bande de base

30_11_11

Communicat° Num^a

- Un code de valence 2 ⊕ résistant au bruit qu'un de valence 3.
- Spectre → répartit° en fct de la fréq, de la puiss du signal.

II_ Canal Idéal

1_ Modèle

Si aucun filtrage de la canal ⇒ on étudie le bruit : $y(t) = x(t) + n(t)$,
avec $x(t)$ signal codé, $y(t)$ le reçu.

$n(t)$ bruit additif d'un signal aléatoire

But → sup le bruit pr récup les a_k.

"Bruit Blanc Gaussien Additif"

↳ bruit gaussien = $n(t)$ gaussien

↳ bruit blanc = cad si on calcule la DSP on obtient une cste sur tt le spectre

$N_0/2$, N_0 est la DSP_ en Watt/Hertz.

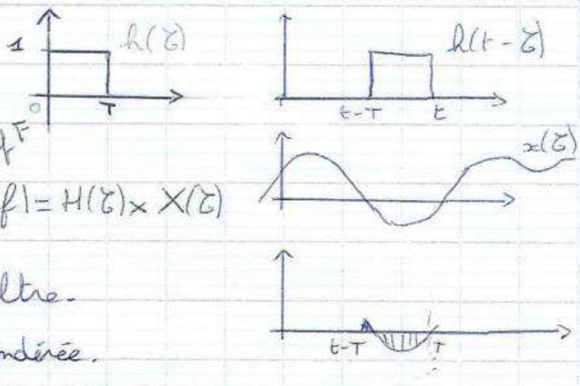
On étudie la posit° du signal par rapport à 0_ On peut aussi regarder la moyenne.

convolut°

$$y(t) = h * x(t)$$
$$= \int_{\mathbb{R}} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

⇓ Transf F

$y(0) = \dots \quad y(t_0) = \dots \qquad Y(f) = H(\tau) \times X(\tau)$



⇔ c'est ce que fait un filtre.
convolut° → moyenne glissante pondérée.

Le filtre de $\boxed{\text{récept}^\circ}$ $g_r(t)$ permettra de limiter l'impact du bruit sur la $\boxed{\text{proba d'erreur}}$.

L' $\boxed{\text{échantillonnage}}$ de $r(t)$ tr les KT permettra d'estimer $\hat{a}_k$ (symbole transmis

$$a(t) \to \boxed{g(t)} \xrightarrow{x(t)} \oplus \xrightarrow{y(t)} \boxed{g_r(t)} \xrightarrow{r(t)} \boxed{\text{seuil}} \xrightarrow{\hat{a}_k}$$
$$\uparrow n(t)$$

2. Règle de décision

(34) $y(t) = x(t) + n(t)$. $x(t) = \sum a_k g(t)$

Transmission d'un seul symb : $a_0 = \pm 1 \Rightarrow x(t) = a_0 g(t)$

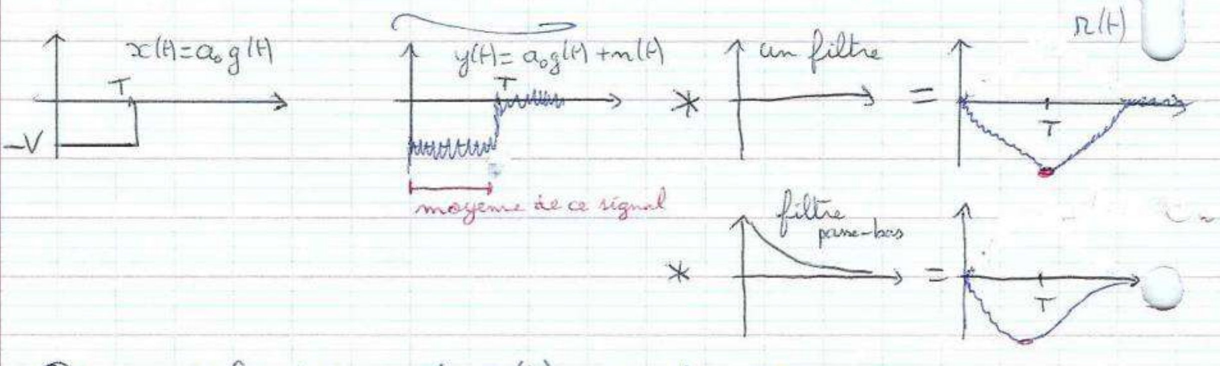
D'où $y(t) = a_0 g(t) + n(t)$.

$r(t) = a_0 h(t) + b(t)$ $(y(t) * g_r(t) = r(t))$ cf schéma avant.

$= a_0\, g * g_r(t) + n * g_r(t)$

On considère : $r(t_0) = a_0 h(t_0) + b(t_0)$, on prend une

S : seuil. décision : $\begin{cases} r(t_0) > S \Rightarrow \hat{a}_0 = 1 \\ \text{—} < S \Rightarrow \text{—} -1 \end{cases}$ on déf une règle de décision



On prend la décision à $r(t_0)$ avec $t_0 = T$.

Erreur qd trop de bruit.

---

(35) Erreur binaire qd $\hat{a}_0 \neq a_0$.

Le terme $b(t_0)$ est la réalisat° d'une variable gaussienne $\boxed{\text{centrée}}$ (cad moyenne nulle) de variance σ^2.

---

(36) Symb équiprobables : $p_{-1} = p_1 = 1/2$.

On veut minimiser P_e, cad maximiser $\frac{h(t_0)}{\sigma\sqrt{2}}$ (σ variance du bruit après filtrage.)

$h(t_0)$: amplitude du signal.

3. Filtre optimal

$g_r(\tau) = k\, g(t_0 - \tau)$ Il s'agit du filtre adapté. Et la proba d'erreur est alors : $\boxed{P_e = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}}$ où $a_k = \pm 1$

E_b : nrj moyenne par bit.

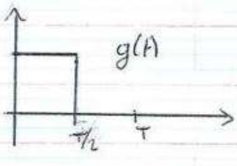
N_0 : DSP du bruit

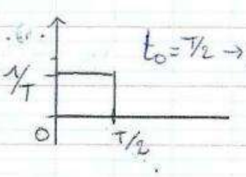
Exercice

- Calculer $h(t) = g * g_r(t)$ ← filtre de récept°
- Mq $r(nT+t_0)$ est la moyenne de $y(t)$ sur $[nT, nT+T/2]$

On a : $t_0 = T/2$ – $\underset{t\in[0,T/2]}{g(t) = V}$ – $g_r(t) = A\,g(t_0 - \tau)$. $(A = \frac{1}{VT})$

décale de t_0 et inverse





$t_0 = T/2 \to g_r(t) = \frac{1}{VT}\,g(T/2 - t)$

on va à T/2 puis on trace l'inverse de $g(-t) \times 1/VT$.

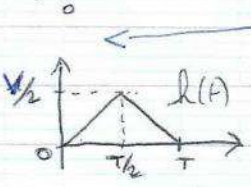
$$h(t) = g * g_r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_r(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau \qquad g_r(\tau) = 0 \text{ si } \tau \notin [0, T/2]$$

$$\Leftrightarrow h(t) = \int_0^{T/2} g_r(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} g(t-\tau)\,d\tau$$

$0 \leq t-\tau \leq T/2$
$0 \geq \tau - t \geq -T/2$
$t \geq \tau \geq t - T/2$

moyenne glissante.

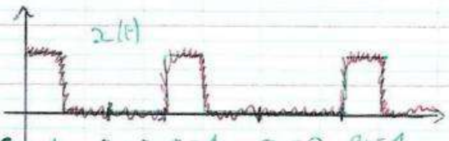
$$\Leftrightarrow h(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t} g(\tau)\,d\tau$$



- $r(t) = y * g_r(t)$

$$\Leftrightarrow r(t) = \int_{t-T/2}^{t} y(\tau)\,d\tau \times \frac{2}{T}$$

On regarde à $t = T/2 + kT \to r(T/2 + kT) = \int_{kT}^{T/2+kT} y(\tau)\,d\tau \times \frac{2}{T}$



ex : pour $k = 3$ on a : $[3T ; \frac{7T}{2}]$.

3 – Transmission d'une séq de symboles.

Le filtre adapté pr un symbole fonctionne pr une séq de symb.

$$P_e = \frac{1}{2}\,\text{erfc}\sqrt{\frac{E_{mb}}{2N_0}}$$

E_{mb} : nrj moyenne par bit.
N_0 : DSP du bruit.

III - Canal à bande limitée.

1 - Modèle.

$a_k \to$ [Codeur] $\xrightarrow{x(t)}$ [Canal $C(f)$] $\xrightarrow{r(t)}$ [Décodeur] $\to \hat{a}_k$

comparaison à un seuil

$r(t) = x * C(f)$

$C(f) = C_e(f) . C_o(f) . C_r(f)$

↳ filtre de pré-égalisat° ↳ $C_r(f)$ filtre de récept°.

↳ $C_o(f)$ modélise le canal φ^q, imposé.

⇒ plus filtre en cascade, on peut dire que c'est un seul étant le Π des fcts de transfert

- Le codeur est un filtre - D'où canal + codeur = 1 filtre.

⇒ d'où fct de transfert = l'un × l'autre

$h(t) = g * c(t)$ g : formant - c(t) : canal.

↳ rép du canal avec en entrée le formant.

$r(t) = \sum_k a_k h(t-kT) \longrightarrow$ 2 étapes : $\left\{ \begin{array}{l} \text{échantillonnage} \\ \text{seuillage.} \end{array} \right. \Rightarrow$ on estime les valeurs a_k.

2 - Existence de l'IES (Interférence entre symb).

- Canal idéal → le signal ne dépend que de a_p.
- —— filtrant → —— dépend des symb précédents.

3 - 1er critère de Nyquist

$r(t) = \sum a_k h(t-kT)$

Pr estimer $\hat{a}_p$, on compare à des seuils : $r(t_0 + pT)$.

Et on a : $r(t_0+pT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k h(t_0 + pT - kT)$ $\Big\}\ k = p-n$

$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{p-n} h(t_0 + nT)$

$= a_p h(t_0) + \underbrace{\sum_{n \neq 0} a_{p-n} h(t_0 + nT)}_{\text{IES}}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{1er critère de N :} \\ h(t) \text{ doit ê tq } \exists\, t_0 \text{ tq } \left\{ \begin{array}{l} h(t_0) \neq 0 \\ h(t_0 + nT) = 0 \quad \text{pr } n \neq 0 \end{array} \right. \end{array}}$$

$h(t)$ rép du canal au formant → on peut jouer sur / modif le filtre et/ou le formant.

Com Num

9, III. Canal Idéal

Chap 1

5.12.11

III. 3. 1er critère de Nyquist

$\left(h(t) \text{ doit ê tq } \exists\, t_0 \text{ tq } \begin{cases} h(t_0) \neq 0 \\ h(t_0 + nT) = 0 \quad \text{pr } n \neq 0 \end{cases} \right)$

Un signal échantillonné, son spectre est périodisé.

$h(0) = A$

$h(nT) = 0$ pr $n \neq 0$, avec T inverse du débit brut.

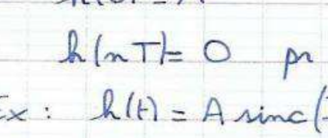
Ex : $h(t) = A \,\text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T}\right)$

On a bien : $h(0) = A$ et $h(nT) = A.\,\text{sinc}\left(\frac{\pi n T}{T}\right) = 0$ si $n \neq 0$.

$\boxed{H(f) = A.T.\Pi(fT)}$

Rappel : Π fct porte : $\Pi(u) \begin{cases} 1 & \text{si } |u| \leq 1/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$fT \leq 1/2$
$\Leftrightarrow f \leq \frac{1}{2T}$



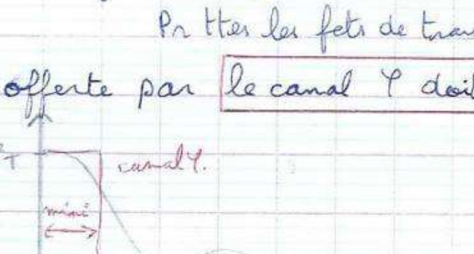
Une fct de transfert qui rép au critère de N est le filtre passe-bas idéal de fréq de coupure : $\frac{1}{2T}$, la moitié du débit symb.

Pbl majeur de ce filtre → c'est un filtre idéal.

Pr ttes les fcts de transfert qui rép au critère de N., la bande passante offerte par $\boxed{\text{le canal } \varphi \text{ doit ê au } \ominus \text{ égale à } 1/2T}$.

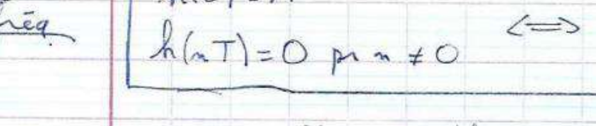
ex : DSP $S_{xx}(f)$ code NRZ.

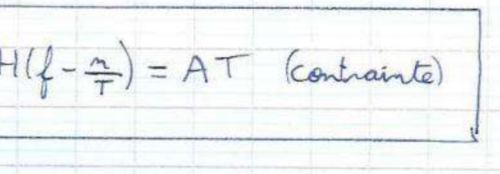
exemple TD



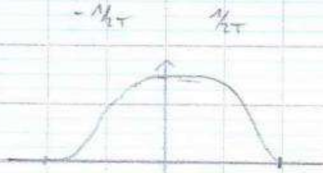
critère de N en fréq

$$\boxed{\begin{matrix} h(0) = A \\ h(nT) = 0 \text{ pr } n \neq 0 \end{matrix} \iff \sum_n H\left(f - \frac{n}{T}\right) = AT \quad \text{(contrainte)}}$$



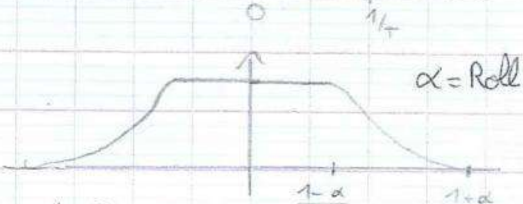


α = Roll of factor.



cosinus surélevé

Canal $\varphi \geq 1/T$



$\alpha = 0 \to$ passe-bas idéal

$\alpha = 1 \to$ cosinus surélevé

canal $\varphi \geq \frac{1+\alpha}{2T}$

TD : Com Num

1

03_01_12

Sujet 5 : Codes correcteurs _ Code de Haming.

$P_e = P_{roba}\{\alpha_k \neq \tilde{\alpha}_k\}$

cf cours feuille 3

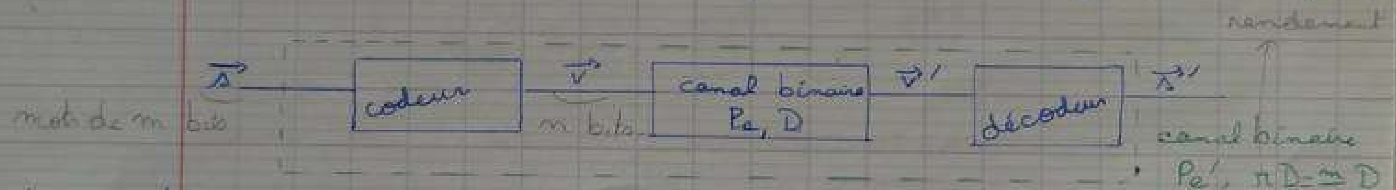
· Code correcteur :

- corriger ou détecter une erreur en ajoutant de la redondance, donc le débit effectif va diminuer, ainsi que la proba d'erreur. À clore qu'avec la valence : ↗ valence, ↗ débit bin^{a} ms aussi proba d'erreur

- Procédures → BEC _ FEC

1. Code de Haming

Code en block (not^{n} de longueur : la source long M, envoi long N)



• code séparable :

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_7) = (\underbrace{s_1, s_2, s_3, s_4}_{m}, \underbrace{v_5, v_6, v_7}_{k \text{ séq de contrôle}}) \qquad m + k = n$$

1) • code linéaire :

$v_1 = s_1$, $v_2 = s_2 \dots$ v_5 = combi liné^{e} de $s_1 \dots s_4$.

$$\underset{(7\times1)}{\vec{v}} = G \underset{(4\times1)}{\vec{s}} = G \times \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix}$$

G : mat génératrice existe car code linéaire.

$\Rightarrow G\ (7\times4)$

2) $\hookrightarrow$ $v_5 = a_1 . s_1 + a_2 . s_2 + a_3 s_3 + a_4 s_4$

$v_6 = b_1 s_1 + \dots + b_4 s_4$

$v_7 = c_1 s_1 + \dots + c_4 s_4$

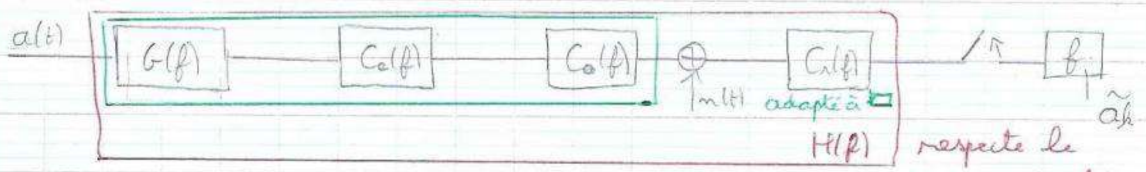
(On est ds l'algèbre de Bool, les "a" prennent [0; 1]
$\oplus$: Ou exclusif
$\otimes$: Et)

$$G \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$

2^7 : 128 mots de 7 bits possible.

5_ Proba d'erreur

Hyp : Critère de N respecté : $r(t_0+pT) = a_p h(t_0)$



$C_r(f)$ adapté à ce qui est en amont du bruit. $C_r(f)$ n'est donc pas choisi, mais imposé en fct de $C_e(f)$_

Pr que $H(f)$ respecte N, on va jouer sur $C_e(f)$ (∅ imposé seul modifiable)

Si le critère de N respecté et filtre adapté

Alors : $\boxed{P_e = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\sqrt{\frac{E_b}{N_b}}}$ $a_k = \pm 1$, on retrouve la formule d'un filtre adapté.

$$P_e = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\sqrt{\frac{E_{mb}}{2N_b}} \quad a_k = 0, 1$$

- Pr avoir canal idéal on vire C_e et C_o -
- Concilier les deux contraintes = "l'égalisat°"_
- Si l'esbl rép au critère de N, et filtre de récept° adapté alors la proba d'erreur est la m̂ que ds un canal idéal -