Communications numériques
Ch. 1 – Transmission en bande de base

Maxime Ossonce
ossonce@gmail.com

EFREI – L3

Semestre 5

Plan du cours

La transmission en bande de base

Transmission d'une source numérique *via* un canal dont la bande de fréquence utilisable est centrée autour de $f = 0$ (bande située entre 0 et B):

- codage en ligne,
- transmission du signal codé sur un canal physique,
- régénération de la séquence de symboles transmis.

Schéma de transmission en bande de base

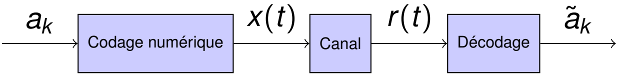


Figure: Transmission en bande de base

- Les symboles a_k prennent un nombre fini de valeurs (*e.g.* 2 dans le cas d'une source binaire, $a_k \in \{-1, 1\}$ ou $a_k \in \{0, 1\}$),
- la source est cadencée par une horloge de période T, le symbole a_k est transmis au temps $t = kT$,
- $x(t)$ est le signal codé, injecté à l'entrée du canal physique,
- $r(t)$ est le signal reçu, permettant d'estimer $\tilde{a}_k$.

I CODAGE DE VOIE

Codage numérique

Le **codage de voie**, ou **numérique**, ou **en ligne** est la fonction qui permet de créer un **signal** $x(t)$ à partir d'une suite de symboles a_k.

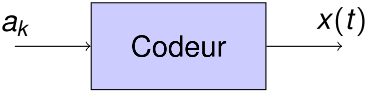


Figure: Codeur

Exemple de signal codé

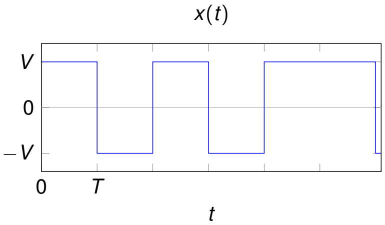


Figure: Exemple de signal codé

- $a_k \longrightarrow x_k(t) = a_k g(t - kT)$,
- $x_k(t)$ est limité dans le temps (sur la durée d'existence du symbole),
- *e.g.* $k = 3$, $a_k = -1$.

I.1 EXPRESSION DU SIGNAL CODÉ

Signal codé

- $a_k \longrightarrow x_k(t) = a_k g(t - kT)$
- $x_k(t)$ est limité dans le temps (sur la durée d'existence du symbole),
- Le **signal codé** est

$$x(t) = \sum_k x_k(t) = \sum_k a_k g(t - kT)$$

- Le nombre de symboles par unité de temps est le **débit brut**,
- le débit binaire est noté D ($D = \frac{1}{T}$ si les a_k prennent deux valeurs),
- T est la durée d'existence du symbole.

Système linéaire

On considère

$$a(t) = \sum_k a_k \delta(t - kT)$$

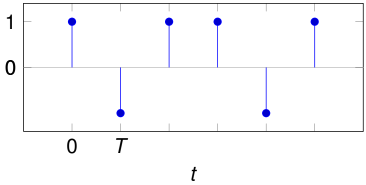


Figure: Signal $a(t)$

Le codeur devient un système linéaire invariant dans le temps

$$x(t) = a * g\ (t)$$

Système linéaire

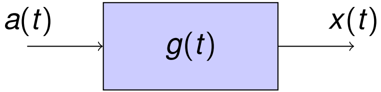


Figure: Codeur

$$
\begin{aligned}
x(t) &= g * a\,(t) \\
&= g(t) * \sum_k a_k \delta(t - kT) \\
&= \sum a_k g(t - kT)
\end{aligned}
$$

- $g(t)$ est le **formant**
- Il est défini sur une période de durée T

Le formant

Exemple:

- $a_k \in \{0, 1\}$
- $g(t) = V \cdot \Pi(t/T)$

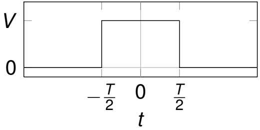


Figure: Le formant

I.2 SPECTRE DU SIGNAL CODÉ

Spectre d'un processus aléatoire

a_k est une séquence aléatoire, $x(t)$ est un **processus stochastique**.

- La transformée de Fourier $X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-2j\pi ft}\,\mathrm{d}t$ ne peut être calculée.
- On utilise la **densité spectrale de puissance** (ou **DSP**):

$$S_{xx}(f) = E\left(|X(f)|^2\right)$$

DSP d'un signal codé

La DSP de $x(t)$ dépendra des propriétés spectrales du formant $g(t)$,

- $S_{gg}(f) = |G(f)|^2$

et statistiques[1] de la séquence $\{a_k\}$:

- $m_a = E(A_k)$
- $\sigma_a^2 = E(A_k^2) - m_a^2$
- $\Gamma_{aa}(n) = E(A_k \cdot A_{k-n}) - m_a^2$

[1] Si la source est sans mémoire (*i.e* les a_k sont indépendants), $\Gamma_{aa}(n) = 0$ pour $n \neq 0$ et $\Gamma_{aa}(0) = \sigma_a^2$

DSP d'un signal codé

Pour calculer la DSP $S_{xx}(f)$ du signal

$$x(t) = \sum_k a_k g(t - kT)$$

Formule de Bennett $S_{xx}(f) =$

$$S_{gg}(f) \cdot \left[\frac{\sigma_a^2}{T} + \frac{m_a^2}{T^2} \cdot \Delta_{\frac{1}{T}}(f) + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{+\infty} \Gamma_{aa}(n) \cos(2\pi nfT) \right]$$

$\Delta_{\frac{1}{T}}(f) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{p}{T})$

Séquence sans mémoire

Quand les a_k sont indépendants, $\Gamma_{aa}(n) = 0$ si $n \neq 0$.

Formule de Bennett simplifiée

$$S_{xx}(f) = S_{gg}(f) \cdot \left[\qquad\qquad\qquad\qquad \right]$$

Exercice: Déterminer les conditions pour que le spectre de $x(t)$ soit auto-porteur de l'horloge.

I.3 Exemples de codes

Propriétés requises d'un signal codé

Le spectre du signal

(a) ne doit pas comporter de composante continue,

(b) doit tendre vers 0 quand $f \to 0$,

(c) doit avoir un support le plus étroit possible,

(d) doit avoir des raies à la fréquence de l'horloge,

(e) doit conserver l'horloge à court terme.

Définitions

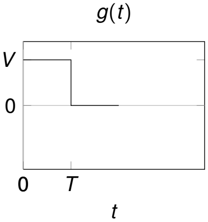
Quelques définitions concernant les signaux codés:

- $\frac{1}{T}$ est le **débit brut** (en baud),
- D est le débit binaire (en bit/s),
- R est la rapidité de modulation, l'inverse du temps le plus court pendant lequel le signal reste constant.
- la est le nombre de valeurs que prennent les symboles a_k (*e.g.* si les a_k prennent 2 valeurs, le code est),
- un code est **unipolaire** si le signal prend des valeurs positives ou nulles, **antipolaire** si le signal prend des valeurs symétriques sans la valeur 0, **bipolaire** si le signal prend des valeurs symétriques, plus la valeur 0.

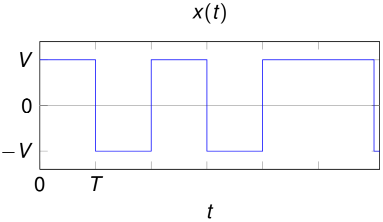
Code NRZ antipolaire

Le code NRZ est un code bivalent.

Figure: Signal codé NRZ



(a) Formant



(b) Signal codé

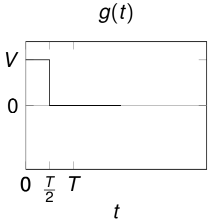
Code NRZ antipolaire

- $a_k = \pm 1$,
- $R = \frac{1}{T}$,
- propriété **(a)**,
- perte de synchro si une suite de 0 ou de 1.

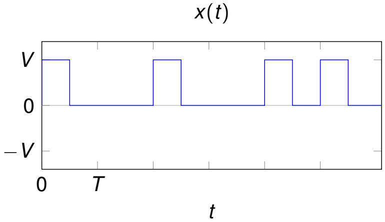
Code RZ unipolaire

Le code RZ est un code bivalent.

Figure: Signal codé RZ



(a) Formant



(b) Signal codé

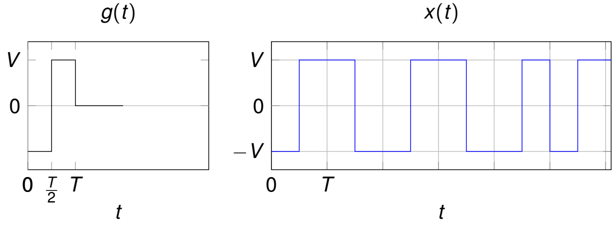
Code RZ unipolaire

- $a_k \in \{0, 1\}$,
- $R = \frac{2}{T}$,
- propriété **(d)** (signal auto-porteur de l'horloge),
- occupation spectrale double par rapport au code NRZ,
- il n'y a pas de différence entre une absence de communication et .

Code biphase (Manchester)

Le code Manchester est un code bivalent.

Figure: Signal codé Manchester



(a) Formant (b) Signal codé

Code biphase (Manchester)

- $a_k \in \{-1, 1\}$,
- $R = \frac{2}{T}$,
- propriétés **(a)**, **(b)**,
- occupationn spectrale .

Code AMI

Le code **Alternate Mark Inversion** est un code trivalent . Le bit 0 est transmis par une absence de signal, un 1 est codé par par un signal positif ou négatif, alternativement.

- Le code AMI utilise le même formant que le code NRZ,
- $a_k \in \{-1, 0, 1\}$, les symboles ne sont pas indépendants,
- $R = \frac{1}{T}$,
- propriétés **(a)**, **(b)**, **(c)**,
- perte de synchro si une suite de 0.

Code 2B1Q

Les codes de **valence** M ont un débit $D = \frac{1}{T}\log_2(M)$.

- Le code $2B1Q$ est un code NRZ de valence 4,
- à chaque doublet de bits, on associe un symbole quaternaire $a_k \in \{-3, -1, 1, 3\}$.
- L'augmentation de la valence permet une augmentation du débit à R (occupation spectrale) constante,
-

II CANAL IDÉAL

Codage de voie

Transmission sur un canal idéal

- Modèle
- Règle de décision
- Filtre optimal
- Transmission d'une séquence de symboles

Transmission sur canal à bande limitée

II.1 MODÈLE

Canal *idéal*

Le canal **idéal** est le canal n'induisant aucun filtrage. Si $x(t)$ est le signal codé, le signal reçu est

- $y(t) = x(t) + n(t)$,
- $x(t) = \sum_k a_k g(t - kT)$,
- $n(t)$ est le , un signal .

Schéma de transmission

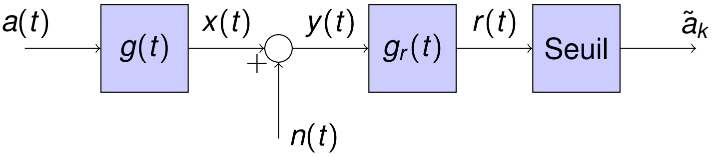


Figure: Transmission sur canal idéal

- Le filtre de $g_r(t)$ permettra de limiter l'impact du bruit sur la .
- L' du signal $r(t)$, tous les kT, permettra d'**estimer** $\tilde{a}_k$, le symbole transmis.

II.2 RÈGLE DE DÉCISION

Cadre de l'étude théorique

Nous considérons la transmission d'**un** symbole $a_0 = \pm 1$.

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) + n(t) \\ &= a_0 g(t) + n(t) \end{aligned}$$

Soit, à la sortie du filtre de réception

$$\begin{aligned} r(t) &= \\ &= \end{aligned}$$

L'estimation du symbole $\tilde{a}_0$ se fait en considérant et en le comparant au seuil S:

$$\begin{aligned} r(t_0) > S &\Rightarrow \tilde{a}_0 = 1 \\ r(t_0) \leq S &\Rightarrow \tilde{a}_0 = -1 \end{aligned}$$

ce qui définit une .

Erreur binaire

Une erreur binaire apparaît lorsque , *i.e*

- $a_0 = 1$ et $h(t_0) + b(t_0) \leq S$
- $a_0 = -1$ et $-h(t_0) + b(t_0) > S$

Le terme $b(t_0)$ est la réalisation d'une variable gaussienne de **variance** σ^2. La **probabilité d'erreur** P_e dépendra de

- p_{-1} et p_1,
- $h(t_O)$,
- S et
- σ

Seuil optimal

On montre que

$$P_e = \frac{1}{2}\left[p_{-1}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{h(t_0)+S}{\sigma\sqrt{2}}\right) + p_1\,\mathrm{erfc}\left(\frac{h(t_0)-S}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right]$$

où

$$\mathrm{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{+\infty} \exp(-u^2)\,\mathrm{d}u$$

Lorsque les symboles sont équiprobables ( ), le seuil S_{opt} qui minimise P_e est $S_{opt} = 0$ et

II.3 FILTRE OPTIMAL

Filtre adapté

Le filtre de réception (de réponse imulsionnelle $g_r(\tau)$) qui minimise la probabilité d'erreur est alors

Il s'agit du . Et la probabilité d'erreur est

$$P_e =$$

- $E_b = \int_{\mathbb{R}} g(t)^2 \, \mathrm{d}t$ est l'énergie moyenne par bit,
- $N_0/2$ est la DSP bilatérale du bruit.

Détails du calcul

L'expression du filtre optimal est donnée en maximisant le rapport $h(t_o)/\sigma$ avec

$$\begin{aligned} h^2(t_0) &= \left(\int_{\mathbb{R}} g_r(\tau) g(t_0 - \tau) \, \mathrm{d}\tau \right)^2 \\ \sigma^2 &= \frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} g_r(\tau)^2 \end{aligned}$$

Le filtre optimal qui maximise le rapport $h(t_o)^2/\sigma^2$ est le filtre adapté (inégalité de Cauchy-Schwarz): $g_r(\tau) = Kg(t_0 - \tau)$. On a, dans le domaine fréquentiel:

$$G_r(f) = K\overline{H(f)}e^{-2j\pi f t_0}$$

Le filtre devant être **causal**, on aura $g_r(t) = 0$ si $t < 0$ donc $t_0 > T$.

Exemple de fltre adapté: le code RZ

Dans le cadre du codage RZ, on a $g(t) = V$ pour $t \in [0, T/2]$.
Soit $g_r(\tau) = Ag(t_0 - \tau)$.

Exercice

- Calculer $h(t) = g * g_r(t)$
- Montrer que $r(nT + t_0)$ est la moyenne de $y(t)$ sur $[nT, nT + T/2]$.

II.4 Transmission d'une séquence de symboles

Séquence de symboles

On montre que dans le cadre d'une transmission d'une séquence de symboles,

$$r(t) = \sum_k a_k h(t - kT) + b(t)$$

le formant $g(t)$ ayant pour support $[0, T]$, le filtre adapté $g_r(t) = Ag(t_0 - t)$ aura pour support $[t_0 - T, t_0]$ et $h(t) = g * g_r(t)$ aura alors pour support $[t_0 - T, t_0 + T]$, ainsi $h(pT + t_O) = 0$ si $p \neq 0$. On aura donc

$$\begin{aligned} r(nT + t_0) &= \sum_k a_k h(nt + t_0 - kT) + b(nT + t_0) \\ &= a_n h(t_0) + b(nT + t_0) \end{aligned}$$

Le signal reçu $h(nT + t0)$ ne dépend que du symbole a_n.

Autres cas

Le filtre adapté permet d'obtenir une probabilité d'erreur minimale en présence d'un bruit blanc gaussien. Si

- $a_k \in \{0, 1\}$, alors

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{E_{mb}}{2N_0}}$$

- $a_k \in \{-\frac{M-1}{2}, -\frac{M-3}{2}, \dots, \frac{M-1}{2}\}$ prend M valeurs, alors

$$P_{eb} \approx \frac{M-1}{M \log_2 M} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{3 \log_2 M}{(M^2-1)} \frac{E_{mb}}{2N_0}} \right)$$

III CANAL À BANDE LIMITÉE

III.1 MODÈLE

Modèle

III.2 IES

IES

III.3 PREMIER CRITÈRE DE NYQUIST

Premier critère de Nyquist

III.4 Diagramme de l'œil

Diagramme de l'œil