Communication Numérique

Codage en ligne d'un signal

Yoann Morel

http://xymaths.free.fr/Signal/Communication-Numerique-cours-TP.php

Transmission en bande de base

- Bande de base : Transmission des signaux tels quels, dans la bande de fréquence originale (souvent de $f = 0$ à $f = F_{max}$ Hz).
- Canal idéal : Canal de bande passante infinie et non bruité
- Codage en ligne : Transmission de messages constitués d'éléments binaires α_k, émis à des instants kT_b, indépendants et identiquement distribués sur l'alpabet $\{0, 1\}$
  • Le codage en ligne permet d'associer à chaque élément α_k un signal continu de durée T_b
  • Le symbole α_k n'existe que pendant la durée T_b

A partir des éléments binaires α_k que l'on souhaite transmettre, on construit le signal continu $a(t)$:

$$a(t) = \sum_k \alpha_k \, \delta(t - kT_b)$$

Le système de codage doit présenter les propriétés suivantes :

- linéarité
- invariance (par rapport aux retards)
- continuité (stabilité)

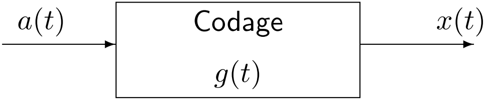
A partir des éléments binaires α_k que l'on souhaite transmettre, on construit le signal continu $a(t)$:

$$a(t) = \sum_k \alpha_k \, \delta(t - kT_b)$$

Le système de codage doit présenter les propriétés suivantes :

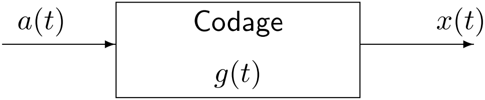
- linéarité
- invariance (par rapport aux retards)
- continuité (stabilité)

Le système de codage est donc un filtre.



On note $g(t)$ la R.I. de ce filtre, aussi appelé "formant" du code.
On a alors,

$$x(t) =$$



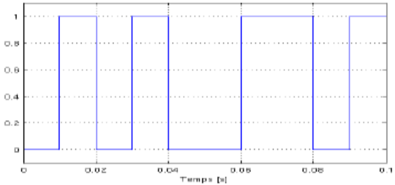
On note $g(t)$ la R.I. de ce filtre, aussi appelé "formant" du code.
On a alors,

$$x(t) = g(t) * a(t) = g(t) * \sum_k \alpha_k \, \delta(t - kT_b)$$

et donc,

$$x(t) = \sum_k \alpha_k \, g(t - kT_b)$$

1^{er} exemple de code en ligne



Code Unipolaire NRZ
(Non Return to Zero) binaire :

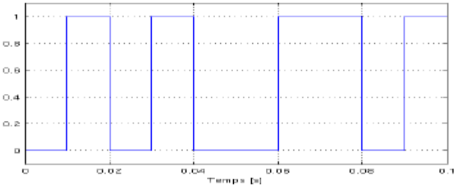
C'est un code tel que :

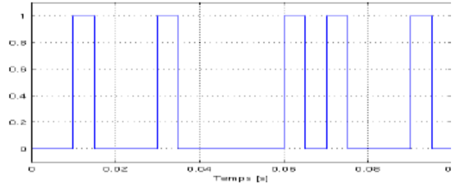
$$\begin{cases} \alpha_k = \pm 1 \\ g(t) = V \, \mathrm{Rect}_{T/2}(t) \end{cases}$$

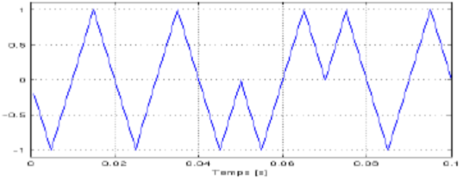
Il existe de nombreux autres codes : Unipolaire NRZ, Unipolaire RZ, Triangle, Manchester, AMI (Alternate Mark Inversion)

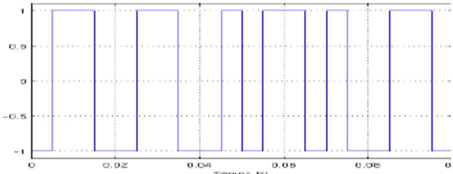
$\longrightarrow$ cf. TP.

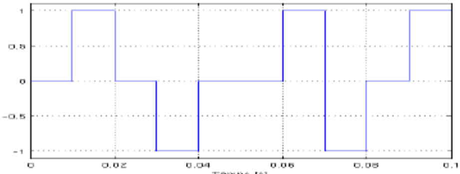
$$(\alpha_k) = 0101001101$$











Terminologie des codes en lignes

Valence : Nombre d'états significatifs du signal numérique.

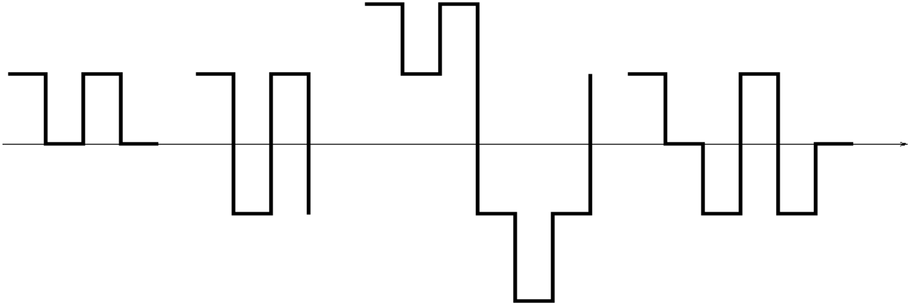
$\longrightarrow$ Etat :

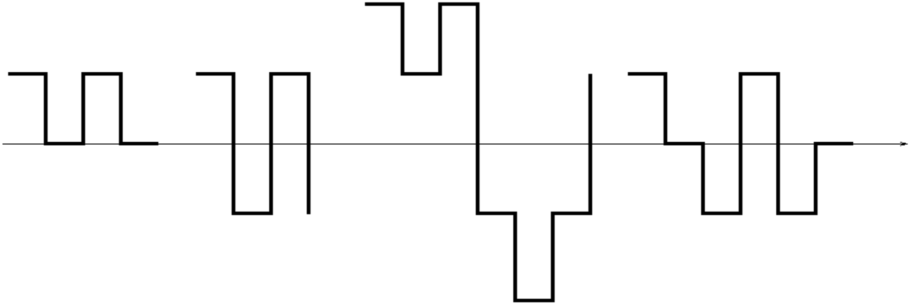
- une amplitude
- une fréquence
- une phase
- Valeur constante

$\longrightarrow$ Significatif : représentatif d'un symbole

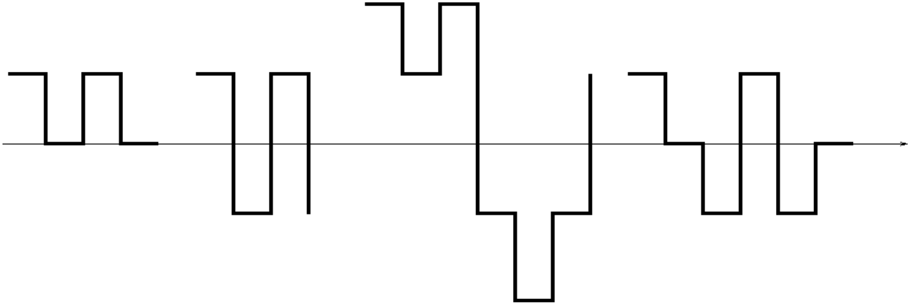
Polarité : Signe possible du signal :

- signal unipolaire : valeurs ≥ 0 ($0, +1, +2, \ldots$)
- signal antipolaire : valeurs symétriques par rapport à 0, sans 0 $(\pm 1, \pm 2, \ldots)$
- signal bipolaire : signal antipolaire, plus la valeur 0



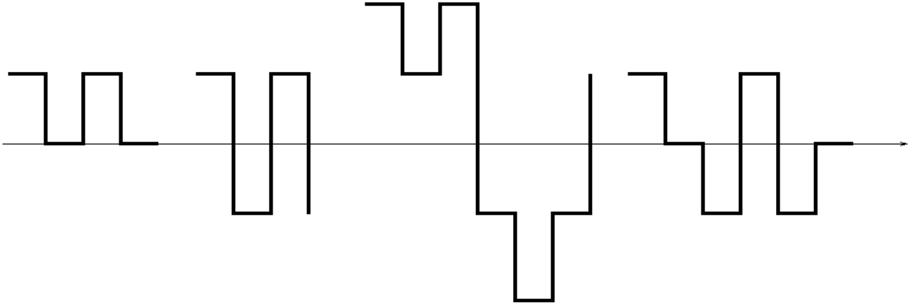


Bivalent
unipolaire



Bivalent unipolaire

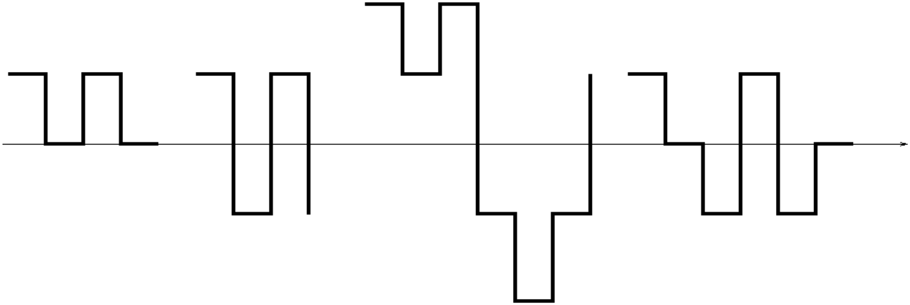
Bivalent antipolaire



Bivalent unipolaire

Bivalent antipolaire

Tétravalent antipolaire



Bivalent unipolaire

Bivalent antipolaire

Tétravalent antipolaire

Trivalent bipolaire

DSP d'un signal codé

Soit $x(t) = g(t) * a(t)$ un signal codé en ligne, avec $a(t) = \sum_k \alpha_k \, \delta(t - kT)$, et donc, $x(t) = \sum_k \alpha_k \, g(t - kT)$.

La suite (α_k) est aléatoire, de caractéristiques :

$$\begin{cases} \text{Moyenne :} & \overline{\alpha} = E(\alpha_k) \\ \text{Variance :} & \sigma_\alpha^2 = \mathrm{Var}(\alpha_k) = E(\alpha_k^2) - \overline{\alpha}^2 = \overline{\alpha^2} - \overline{\alpha}^2 \\ \text{Auto-corrélation :} & R_{\alpha\alpha}(n) = E(\alpha_k \, \alpha_{k+n}) = \Gamma_\alpha(n) + \overline{\alpha}^2 \end{cases}$$

où $\Gamma_\alpha(n) = R_{\alpha\alpha}(n) - \overline{\alpha}^2$ est la fonction d'auto-corrélation des (α_k) centrés

En utilisant le théorème de Wiener-Kinshine : DSP$(x) = \mathcal{F}(R_{xx})$

On aboutit à la formule de Bennet :

$$\boxed{DSP(x)(f) = DSP(g)(f)\left[\frac{\sigma_a^2}{T} + \frac{\overline{\alpha}^2}{T^2}\Pi_{1/T}(f) + \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma_\alpha(n)\,\cos(2\pi n f T)\right]}$$

En utilisant le théorème de Wiener-Kinshine : DSP$(x) = \mathcal{F}(R_{xx})$

On aboutit à la formule de Bennet :

$$\boxed{DSP(x)(f) = \quad |\hat{g}(f)|^2 \quad \left[\frac{\sigma_a^2}{T} + \frac{\overline{\alpha}^2}{T^2}\Pi_{1/T}(f) + \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma_\alpha(n)\,\cos(2\pi nfT)\right]}$$

Formule de formule de Bennet :

$$\boxed{DSP(x)(f) = \quad |\hat{g}(f)|^2 \quad \left[\frac{\sigma_a^2}{T} + \frac{\overline{\alpha}^2}{T^2}\Pi_{1/T}(f) + \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma_\alpha(n)\,\cos(2\pi n f T)\right]}$$

Si $\overline{\alpha} \neq 0$, présence de "raies" à la fréquence d'horloge.

Formule de formule de Bennet :

$$\boxed{DSP(x)(f) = \quad |\hat{g}(f)|^2 \quad \left[\frac{\sigma_a^2}{T} + \frac{\overline{\alpha}^2}{T^2}\Pi_{1/T}(f) + \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma_\alpha(n)\ \cos(2\pi n f T)\right]}$$

En général, la source est "sans mémoire", i.e.

$$\begin{aligned} R_{\alpha\alpha}(n) = E(\alpha_k \alpha_{k+n}) \quad &= E(\alpha_k)\, E(\alpha_k) \\ &= [E(\alpha_k)]^2 \\ &= \overline{\alpha}^2 \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\Gamma(n) = 0$.

Exemple : DSP du code NRZ (polaire)

$$g(t) = V\,\mathsf{Rect}_T(t) \Longrightarrow \hat{g}(f) =$$

$$\alpha_k \in \{-1;1\}\ \text{ et, } \begin{cases} \overline{\alpha} & = \\ \sigma_\alpha^2 = \overline{\alpha^2} - \overline{\alpha}^2 & = \\ \Gamma_\alpha(k) = R_{\alpha\alpha}(n) - \overline{\alpha}^2 & = \end{cases}$$

Exemple : DSP du code NRZ (polaire)

$$g(t) = V\,\mathsf{Rect}_T(t) \Longrightarrow \hat{g}(f) = VT\,\mathsf{sinc}(\pi f T)$$

$$\alpha_k \in \{-1;1\} \;\text{ et, }\; \begin{cases} \overline{\alpha} & = \\ \sigma_\alpha^2 = \overline{\alpha^2} - \overline{\alpha}^2 & = \\ \Gamma_\alpha(k) = R_{\alpha\alpha}(n) - \overline{\alpha}^2 & = \end{cases}$$

Exemple : DSP du code NRZ (polaire)

$$g(t) = V\,\mathsf{Rect}_T(t) \Longrightarrow \hat{g}(f) = VT\,\mathsf{sinc}(\pi f T)$$

$$\alpha_k \in \{-1;1\} \;\text{ et, } \begin{cases} \overline{\alpha} & = 0 \\ \sigma_\alpha^2 = \overline{\alpha^2} - \overline{\alpha}^2 & = \\ \Gamma_\alpha(k) = R_{\alpha\alpha}(n) - \overline{\alpha}^2 & = \end{cases}$$

Exemple : DSP du code NRZ (polaire)

$$g(t) = V\,\mathsf{Rect}_T(t) \Longrightarrow \hat{g}(f) = VT\,\mathsf{sinc}(\pi f T)$$

$$\alpha_k \in \{-1;1\} \text{ et, } \begin{cases} \overline{\alpha} & = 0 \\ \sigma_\alpha^2 = \overline{\alpha^2} - \overline{\alpha}^2 & = 1 \\ \Gamma_\alpha(k) = R_{\alpha\alpha}(n) - \overline{\alpha}^2 & = \end{cases}$$

Exemple : DSP du code NRZ (polaire)

$$g(t) = V\,\mathsf{Rect}_T(t) \Longrightarrow \hat{g}(f) = VT\,\mathsf{sinc}(\pi f T)$$

$$\alpha_k \in \{-1;1\} \text{ et, } \begin{cases} \overline{\alpha} & = 0 \\ \sigma_\alpha^2 = \overline{\alpha^2} - \overline{\alpha}^2 & = 1 \\ \Gamma_\alpha(k) = R_{\alpha\alpha}(n) - \overline{\alpha}^2 & = 0 \end{cases}$$

Exemple : DSP du code NRZ (polaire)

$$g(t) = V\,\mathrm{Rect}_T(t) \Longrightarrow \hat{g}(f) = VT\,\mathrm{sinc}(\pi f T)$$

$$\alpha_k \in \{-1;1\} \text{ et, } \begin{cases} \overline{\alpha} & = 0 \\ \sigma_\alpha^2 = \overline{\alpha^2} - \overline{\alpha}^2 & = 1 \\ \Gamma_\alpha(k) = R_{\alpha\alpha}(n) - \overline{\alpha}^2 & = 0 \end{cases}$$

On obtient alors, en appliquant la formule de Bennet :

$$\boxed{DSP(f) = V^2 T\left[\mathrm{sinc}(\pi f T)\right]^2}$$

Exemple : DSP du code NRZ (polaire)

$$g(t) = V\,\mathsf{Rect}_T(t) \Longrightarrow \hat{g}(f) = VT\,\mathsf{sinc}(\pi f T)$$

$$\alpha_k \in \{-1; 1\} \text{ et, } \begin{cases} \overline{\alpha} & = 0 \\ \sigma_\alpha^2 = \overline{\alpha^2} - \overline{\alpha}^2 & = 1 \\ \Gamma_\alpha(k) = R_{\alpha\alpha}(n) - \overline{\alpha}^2 & = 0 \end{cases}$$

On obtient alors, en appliquant la formule de Bennet :

$$\boxed{DSP(f) = V^2 T\,[\mathsf{sinc}(\pi f T)]^2}$$

Propriétés :

- $DSP(0) \neq 0$
- $DSP(f) \sim f^{-2}, f \to \infty$
- Max $(DSP(f))$ atteints en $f = k\frac{2}{T}$, $k \in \mathbb{N}$

Critère de choix d'un code en ligne

- Le milieu de transmission à une bande passante finie
  $\Longrightarrow$ nécéssité de la décroissante de la DSP en f^{-n}, avec n grand
- Pour des distances importantes, utilisation de régénérateurs alimentés en courant continu
  $\Longrightarrow$ nécéssité d'un code à spectre nul autour de $f = 0$
- Pour le décodage, on a besoin de la fréquence d'horloge
  $\Longrightarrow$ importance d'un spectre qui contient des raies à cette fréquence