NOM DANG

Prénom Margaux

Promo 2018

Date 23/03/2016

DANG Margaux
L3 - 2015

17 ,

$\frac{17}{25}$

MATIÈRE théorie des groupes

Exercice 1 :

$(\mathbb{Z}/48\mathbb{Z}, \oplus)$

Ordre de $\overline{20}$: $\overline{20}, \overline{40}, \overline{12}, \overline{32}, \overline{4}, \overline{24}, \overline{44}, \overline{16}, \overline{36}, \overline{8}, \overline{28}, \overline{1}$

L'ordre de $\overline{20}$ est donc 12.

2

Exercice 2 :

$(\mathbb{Z}/48\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$

ⓐ - $\varphi(48) = \varphi(3 \times 2^4) = 3\left(1 - \frac{1}{3}\right) \times 2^4\left(1 - \frac{1}{2}\right)$

$= (3-1) \times (16-8) = 16$

2

Il y a 16 éléments inversibles.

→ La liste : $\{\overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{23}, \overline{25}, \overline{29}, \overline{31}, \overline{35}, \overline{37}, \overline{41}, \overline{43}, \overline{47}\}$

il y en a bien 16 : c'est la liste des nombres premiers avec 48.

ⓑ - Pour déterminer l'inverse, on utilise Bézout.

U	V	R	Q
1	0	48	
0	1	7	8
1	-8	2	3
-3	25	1	2
		0	

L'inverse de 7 est $\overline{25}$.

0

c) On doit résoudre l'équation $\bar{7}x + \overline{12} = \bar{5}$

soit $\bar{7}x = -\bar{7}$

soit $x = -1$ or dans $\mathbb{Z}/48\mathbb{Z}$, -1 correspond à $\overline{47}$

On a donc $x = \overline{47}$

2

Exercice 3 :

a) Non $\overline{26}$ n'appartient pas à $(R_{48}, \cdot)$ car 26 n'est pas premier avec 48. 2

b) $x^{(26-1)} = \bar{1}$ d'après fermat car $\overline{26}$ n'appartient pas à $(R_{48}, \cdot)$

donc on sait que $x^{25} = \bar{1}$

on cherche donc v tel que $13v \equiv 1 [25]$

on a donc $v = 2$.

0

$x^{13 \times 2} = x^{26} = x^{25} \times x = \bar{1} \times x = x$

$f(x) = x^{13}$ donc $f(x)^{-1} = x^2$.

Exercice 4 :

a) $P(X) = X^3 + X^2 + 1 = (X + a)(X^2 + bX + c)$

$= X^3 + bX^2 + cX + aX^2 + abX + ac$ 2

$\begin{cases} a + b = 1 \\ c + ab = 0 \\ ac = 1 \end{cases}$ $\quad a = c = 1$

$1 + b = 0 \Rightarrow b = 1$ 2

$1 + 1 = 0 \neq 1$ donc irréductible.

b) Il y a 8 éléments car on prend les restes de degré 3 dans $\mathbb{F}_2[X]$

c- L'ordre de $K\setminus\{0\} = 7$ car on a comme éléments : (2

$0, 1, \theta, \theta+1, \theta^2+1, \theta^2+\theta+1, \theta^2, \theta^2+1$ donc $\setminus\{0\}$, on a 7.

d-e- $\theta^0 = 1$

$\theta^1 = \theta$

$\theta^2 = \theta^2$

$\theta^3 = \theta^2 + 1$

$\theta^4 = \theta^2 + \theta + 1$

$\theta^5 = 1 + \theta$

$\theta^6 = \theta^2 + \theta$ (3)

$\theta^7 = 1$

L'inverse de θ est donc θ^6 soit $\theta^2+\theta$.

Pour calculer l'inverse, on utilise les combinaisons linéaire de la question (2). sinon on fait Bézout

U	V	R	Q
1	0	$\theta^3+\theta^2+1$	
0	1	θ	$\theta^2+\theta$
1	$\boxed{\theta^2+\theta}$	0	

?

$\theta^3+\theta^2+1 - \theta(\theta^2+\theta) = 1$