NOM Bloquet

Prénom Romain

Promo 2018

Date 23/03/2016

		2	0	,

BLOQUET Romain
L3 - 2015

MATIÈRE Théorie des Groupes.

$\frac{20}{25}$

Exercice 1 :

2 ordre$(\bar{20})$ = $\underline{12}$ car $48/_{20n}$ - $24/_{10n}$ - $12/_{5n}$ = $12/_{n}$

Exercice 2 :

1. $\varphi(48) = \varphi(2^4)\varphi(3)$

$= 16\left(1-\frac{1}{2}\right) 3\left(1-\frac{1}{3}\right)$

$= (16-8)\,2$

$= \underline{16}$ éléments inversibles

$R48 = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, 37, 41, 43, 47\}$.

2.

u	v	r	q
1	0	48	
0	1	7	6
1	-6	6	1
-1	7	1	6
		0	

2

$48 \wedge 7 = 1$ donc inversible

$(-1).48 + 7 \times 7 = 1$

donc $\bar{7} \times \bar{7} = \bar{1}$

$\underline{\text{l'inverse de } \bar{7} \text{ est } \bar{7}}$.

3. $\bar{7}x + \bar{12} = \bar{5}$

$\bar{7} \odot \bar{7}x + \bar{12} = \bar{5} \odot \bar{7}$

$x + \bar{12} = \bar{35}$

$x + \bar{12} + (-\bar{12}) = \bar{35} - \bar{12}$

$x = \bar{35} + \bar{36}$

$= \bar{23}$

Exercice 3 :

a.

u	v	r	q
1	0	48	
0	1	26	1
1	-1	22	1
-1	2	4	5
6	-11	2	2
		0	

2

$48 \wedge 26 = 2$ donc ils ne sont pas premiers entre eux. $\overline{26}$ ne fait donc pas partie de R_{46}.

b. R_{48} est composé de 16 éléments donnés par ~~le cardinal~~

$\varphi(48) = \varphi(2^3)\,\varphi(3)$

$= 16.$

On sait d'après le théorème d'Euler qu'un élément égal à $\bar{1}$

si $\bar{a}^{\varphi(n)} \Rightarrow \bar{a}^{\varphi(n)} = \bar{1}$

On cherche donc $x^{13} = \bar{1}$

$13 \equiv 1\,[16]$.

Ce qui revient à : $13 = 16k + 1$

$-16k + 13u = 1$

2

k	u	r	q
1	0	16	
0	1	13	1
1	-1	3	4
-4	5	1	3
		0	

$16 \wedge 13 = 1$

$(-4)16 + 5(13) = 1$

$\bar{5}.\overline{13} = \bar{1}$

donc si $f : x \to x^{13}$

alors ~~la réciproque~~ l'application $f^{-1} : y \to y^5$

Exercice 4 :

a. $P(X) = X^3 + X^2 + 1$

$$X^3 + X^2 + 1 = (X+a)(X^2 + Xb + c)$$
$$= X^3 + X^2 b + Xc + X^2 a + Xba + ac$$
$$= X^3 + X^2(a+b) + X(ab+c) + ac$$

avec $\begin{cases} a+b=1 \\ ab+c=0 \\ ac=1 \end{cases}$ dans $\mathbb{F}_2$ éléments $\{0,1\}$.

$a = c = 1$

$a \times c = 1.1 = 1$

$ab+c = 1b+1 = 0 \Rightarrow b = 1$

2

$a+b = \underline{1+1 = 0 \neq 1}$ Contradiction donc $P(X)$ est irréductible dans $\mathbb{F}_2$.

b. le Nombre d'éléments du corps $K = \mathbb{F}_2[X]/P(X)$ est de $2^3 = \underline{8}$.

2

$\{0, 1, \theta, \theta^2, 1+\theta, 1+\theta^2, \theta+\theta^2, 1+\theta+\theta^2\}$.

c. θ dans le groupe $(K\setminus\{0\}, .)$ est d'ordre 7 car $\theta^7 = \bar{1}$

2

d.

u	v	r	q
1	0	$\theta^3+\theta^2+1$	
0	1	θ	$\theta^2+\theta$
1	$+\theta^2+\theta$	$\underline{1}$	θ
		0	

3

$$(1)(\theta^3+\theta^2+1) + (\theta^2+\theta)\theta = 1$$

l'inverse de θ est donc $\underline{\theta^{-1} = \theta^2+\theta}$.

e.

3

$\theta^1 = \theta$

$\theta^2 = \theta^2$

$\theta^3 = \theta^2 + 1$

$\theta^4 = \theta^3.\theta = (\theta^2+1)\theta = \theta^3+\theta = \theta^2+\theta+1$

$\theta^5 = \theta^4.\theta = \theta+1$

$\theta^6 = (\theta^5)\theta = (\theta+1)\theta = \theta^2 + \theta$

$\theta^7 = 1$