

DE « Groupes »

Ni documents, ni machines, ni téléphones

(étudiants chinois : dictionnaires autorisés)

Tout résultat doit être justifié par un théorème du cours (qui sera énoncé), un raisonnement et/ou un calcul

Remarque 1. Le total de points proposé est élevé, faites bien ce que vous savez faire !!

Exercice 1. 2pts environ

Soit $a=3^5 * 7^2 * 4^6$ et $b=6^4 * 14^5$; déterminer le nombre de diviseurs communs à a et b.

Exercice 2. 3 pts environ

Déterminer le plus petit entier positif x tel que $5x \equiv 1 [33]$

Exercice 3. 3 pts environ

On définit la loi de composition interne sur \mathbb{Z} : $x \otimes y = x + y - xy$

On admet qu'elle est associative.

Déterminer si (\mathbb{Z}, \otimes) est un groupe.

Exercice 4. On considère l'anneau $(\mathbb{Z}/19\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ environ 4 pts

1. Déterminer si $\bar{4}$ est inversible et, si oui trouver son inverse.

2. Résoudre l'équation $\bar{4} \odot x = \bar{3} \oplus \bar{15}$

Exercice 5. On considère le groupe (R_{33}, \cdot) 6 pts environ

1. Déterminer le nombre d'éléments de R_{33} . ✓

2. On considère l'application $f: R_{33} \rightarrow R_{33}$ définie comme suit: $\forall x \in R_{33}, f(x) = x^5$.

a. Déterminez l'application f^{-1}

b. Résoudre l'équation $f(x) = \bar{4}$.

Exercice 6. On considère l'anneau de polynômes $F_2[X]$ 4 pts environ

1. Montrer que le polynôme $X^4 + X + 1$ est irréductible dans $F_2[X]$ ✓

2. On définit comme dans le cours $K = F_2[X]/(X^4 + X + 1)$

3. On désigne par θ la classe de X

Calculer $\theta(\theta^3 + 1)$.

4. Déterminer le polynôme unitaire $B(X)$ de plus bas degré tel que $XB(X) \equiv 1 [X^4 + X + 1]$

Exercice 7. On considère l'anneau de polynômes $\mathbb{R}[X]$ 4pts environ

1. Déterminer $D(X) = (X^4 - X^3 + 1) \wedge (X^2 + X + 1)$

2. Déterminer deux polynômes $U(X)$ et $V(X)$ tels que $D(X) = (X^4 - X^3 + 1)U(X) + (X^2 + X + 1)V(X) = D(X)$. ✓