

DE « Groupes »

Pas de machines, pas de documents, pas de téléphone
sauf étudiants chinois : dictionnaire

Tous les résultats seront justifiés (par un calcul, un raisonnement, une définition, un théorème que l'on citera soit par son nom, soit par son contenu)

Exercice 1. (environ 2 pts)

On considère le groupe $(\mathbb{Z}/48\mathbb{Z}, +)$

Déterminer l'ordre de $\overline{20}$.

Exercice 2.

On considère l'anneau $(\mathbb{Z}/48\mathbb{Z}, +, \cdot)$ (environ 5 pts)

- Déterminer la liste des éléments inversibles.
- Déterminer l'inverse de $\overline{7}$.
- Résoudre l'équation $\overline{7}x + \overline{12} = \overline{5}$.

Exercice 3.

On considère le groupe (R_{48}, \cdot) (environ 4 pts)

- Est-ce que $\overline{20}$ y appartient ?
- On désigne par f l'application définie pour tout x de R_{48} par $x \mapsto f(x) = x^{13}$; déterminer l'application f^{-1} .

Exercice 4.

On considère le corps $(F_2, +, \cdot)$ (environ 12 pts)

- Soit $P(X) = X^3 + X^2 + 1$; montrer qu'il est irréductible dans $(F_2[X], +, \cdot)$.
- Quel est le nombre d'éléments du corps $(K = F_2[X]/P(X), +, \cdot)$?
- On posera $\theta =$ classe de X ; quel est l'ordre de θ dans le groupe $(K \setminus \{0\}, \cdot)$?
- Déterminer l'inverse de θ sous la forme d'une combinaison linéaire de puissances de θ .
- Déterminer pour chaque combinaison linéaire de puissances de θ dans K^* son expression sous la forme d'une puissance de θ .