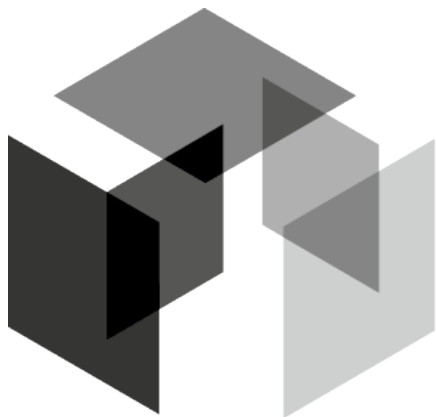




efrei
PARIS SUD
Ingénieurs en mouvement

Electricité Générale

COURS L1

Année 2012-2013

Isabelle Sirot

Table des matières

Chapitre 1 : Lois générales	4
1 Introduction.....	4
2 Grandeurs électriques fondamentales	5
2.1 La charge électrique.....	5
2.2 Le courant	5
2.3 La tension.....	5
2.4 Energie, Puissance	6
3 Loi d'Ohm	6
3.1 Résistance	6
3.2 Loi d'Ohm	7
3.3 Effet Joule	7
3.4 Générateurs	7
3.5 Récepteurs.....	9
Chapitre 2 : Analyse des circuits en courant continu	10
1 Loi de Kirschhoff.....	10
1.1 Définitions	10
1.2 Loi des mailles	10
1.3 Loi des Nœuds	11
1.4 Résistances en série	12
1.5 Règle du diviseur de tension.....	12
1.6 Résistances en parallèle	13
1.7 Règle du diviseur de courant	14
2 Théorèmes.....	15
2.1 Transposition des sources	15
2.2 Théorème de Superposition (de Helmholtz).....	16
2.3 Théorème de Thévenin	16
2.4 Théorème de Norton	17
2.5 Equivalence entre modèle de Thévenin et de Norton.....	17
2.6 Théorème de Millman.....	17
Chapitre 3 : Analyse des circuits en régime sinusoïdal	19
1 Caractéristique d'une grandeur Sinusoïdale	19
1.1 Définition d'une grandeur sinusoïdale.....	19
1.2 Valeur moyenne	20
1.3 Valeur efficace	20

2 Loi d'Ohm généralisée	21
2.1 Impédance, admittance	21
2.2 Comportement d'une résistance	21
2.3 Comportement d'une bobine	21
2.4 Comportement d'un condensateur	22
2.5 Loi d'ohm généralisé, impédance d'un dipôle	23
2.6 Circuit RLC série	24
2.7 Circuit RLC parallèle	24
4 Puissances en régime sinusoïdales.....	25
4.1 Puissance dans les dipôles élémentaires.	25
4.2 Puissance instantanée.....	25
4.3 Puissance moyenne	26
4.4 Puissance active et puissance réactive	26
4.5 Complément sur les puissances	28
.....	

Chapitre 1 : Lois générales

1 Introduction

L'électricité se retrouve partout dans la nature. La science de l'électricité s'est construite peu à peu à partir de simples observations de phénomènes naturels. Nous pouvons l'observer lors d'un orage par la foudre (énorme décharge électrique) et les éclairs (arcs électriques). Dans notre corps elle permet de transmettre de l'information dans les nerfs par influx nerveux.

Deux mille ans d'expérimentation, de recherches et de développements théoriques ont permis les premières applications de l'électricité.

Thalès de Milet, mathématicien et philosophe grec (six siècles avant notre ère) avait découvert qu'en frottant l'ambre jaune avec un chiffon sec, elle attire des corps légers tels que la poussière et les plumes. Il est à noter que le mot électron, provient du grec « ekektron » qui signifie « ambre jaune ».

Dès le III^e siècle, les Asiatiques savaient fabriquer des boussoles de divers types.

La possibilité de produire de l'électricité (statique) fut acquise seulement au XVII^e siècle par les machines de Guericke et puis celle de Huygens mais à ce stade les résultats obtenus ne constituent que des curiosités : on ne cherche pas encore à établir des théories.

Dans l'encyclopédie de Diderot et d'Alembert (1751-1755) l'électricité est encore définie de la façon suivante : « Ce mot (électricité) signifie en général les effets d'une matière très fluide et très subtile, différente par ses propriétés de toutes les autres matières fluides que nous connaissons »

Charles Augustin de Coulomb pose pour la première fois en 1780, les lois de l'attraction électrique et magnétique.

Alessandro Volta inventa la pile électrique en 1800. La découverte de la pile électrique fut une véritable révolution dans ce domaine de la physique car on pouvait enfin produire un courant électrique. L'électricité jusque-là statique devient dynamique, les recherches fondamentales vont pouvoir se développer.

Georg Simon Ohm (1789-1854) va établir la loi qui porte son nom. Ce savant put établir puis généraliser sa loi en remplaçant les piles Volta par des éléments thermo-électriques.

Dès le 18^{ème} siècle, les observations menèrent à des questionnements sur le rapport entre l'électricité et le magnétisme mais c'est James Clerk Maxwell (1831-1879) qui découvrit l'existence de l'onde de nature électromagnétique devant relier champ électrique et champ magnétique.

Henry Hertz réussit en 1887 à produire électriquement les ondes prévues par Maxwell et à leur reconnaître les propriétés d'une lumière de grande longueur d'onde ; c'est l'origine de toute la radiotechnique actuelle.

En 1882, Marcel Deprez réalise le premier transport d'énergie électrique en courant continu. A la même époque l'invention du transformateur permet l'utilisation pratique du courant alternatif. En 1891, Nikola Tesla obtient la transmission d'énergie électrique à grande distance par fil (courant triphasé).

Aujourd'hui l'électricité est une source d'énergie indispensable au cœur du développement de notre société.

2 Grandeurs électriques fondamentales

2.1 La charge électrique

Les charges électriques sont à l'origine des phénomènes électrique, elle est notée q , son unité est le Coulomb $q=1,610^{-19}C$. Toute charge q est un multiple de cette charge élémentaire.

Les atomes sont neutres, ils possèdent autant de charge positive (protons $q=1,610^{-19}C$) que de charge négative (électrons $q=-1,610^{-19}C$)

Les conducteurs sont des matériaux dans lesquels le courant se développe facilement car les électrons libres sont nombreux et peuvent se mouvoir facilement d'un endroit à un autre. La plupart des métaux sont des bons conducteurs, l'argent est le meilleur conducteur de tous, suivi du cuivre. Le cuivre est généralement employé comme conducteurs dans les fils électrique.

Les matériaux isolant sont faiblement conducteurs, ils ont peu d'électrons libres on les utilise le plus souvent quand on veut empêcher le courant de passer (verre, plastique)

Les semi conducteurs sont plutôt isolants mais ils deviennent conducteurs si on élève la température ou s'ils contiennent des impuretés. Les semi conducteurs sont à la base des circuits électroniques.

2.2 Le courant

Lors que deux charges électriques égales et opposées sont reliées par un conducteur métallique, les électrons se déplacent de la charge négative (pole -) vers la charge positive (pôle +). Ce flux d'électrons constitue le courant électrique, dont le sens est par convention opposé à celui de la migration des électrons. Un courant électrique est continu s'il se déplace toujours dans le même sens.

L'intensité d'un courant électrique exprime un débit de charges à travers une section de conducteur en unité de temps en un point donné du circuit.

$$i = \frac{dq}{dt}$$

i intensité du courant en Ampère

dq représente la quantité algébrique de charge (en Coulombs) traversant la section S du conducteur pendant un intervalle de temps dt (en seconde).

2.3 La tension

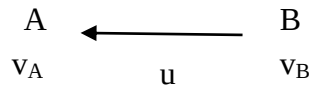
Une charge q , placée en un point où le potentiel est v possède une énergie potentielle électrique $w = q \cdot v$

L'unité du potentiel électrique est le volt (V)

On peut définir un potentiel de référence, tel que son potentiel soit nul, ce point est symbolisé par une masse.

La tension U entre deux points A et B d'un circuit est la différence de potentiel entre ces deux points $u = v_A - v_B$

Par convention, la tension $u = v_A - v_B$ sera indiquée par une flèche orientée de B vers A



2.4 Energie, Puissance

Au cours d'un intervalle de temps dt une charge dq se déplace dans un élément entre deux points A et B présentant une différence de potentiel $u = v_A - v_B$. Elle voit son énergie potentielle varier de la quantité

$$dw = dq \cdot (v_A - v_B) = dq \cdot u$$

On sait que $dq = i \, dt$

$$dw = u \cdot i \cdot dt \text{ en Joules (J)}$$

Si la charge gagne de l'énergie, l'élément est dit générateur.

Si la charge perd de l'énergie électrique, l'élément est dit récepteur

L'énergie échangée au cours d'un intervalle de temps T est

$$W = \int_0^T u \cdot i \cdot dt$$

On définit la puissance comme le débit de l'énergie :

$$p = \frac{dw}{dt} = u \cdot i$$

Si la tension et le courant sont constants, la puissance est constante. $P = U \cdot I$

3 Loi d'Ohm

3.1 Résistance

Dans tout matériau, il existe une force qui s'oppose au déplacement des charges. Cette force d'opposition résulte des collisions des électrons entre eux et des collisions avec les atomes. Elle transforme l'énergie électrique en énergie thermique ; on l'appelle résistance du matériau, elle s'exprime en ohm Ω

A une température donnée, la résistance d'un conducteur de section transversale uniforme s'écrit

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

ρ est la résistivité de matériau en ohm-mètre

l la longueur en mètre

S la surface de la section en m^2

3.2 Loi d'Ohm

George Simon Ohm a démontré que la relation qui relie le courant à la différence de potentielle est de la forme.

$$u_{AB} = v_A - v_B = R i_{AB}$$

u_{AB} est la différence de potentielle entre deux points entre A et B qui s'exprime en Volt

i_{AB} est le courant qui circule dans le dipôle AB en ampère

3.3 Effet Joule

La circulation de l'énergie dans une résistance provoque un dégagement de chaleur. L'énergie électrique est transformée en énergie thermique. La puissance est dissipée par effet Joule.

$$P = R I^2$$

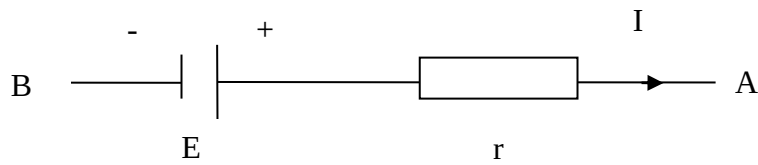
3.4 Générateurs

Un générateur est une source d'énergie électrique, elle débite un courant i lié à sa force électromotrice e . La différence de potentielle entre les bornes A et B s'écrit :

$$u_A - u_B = u_{AB} = e - rI$$

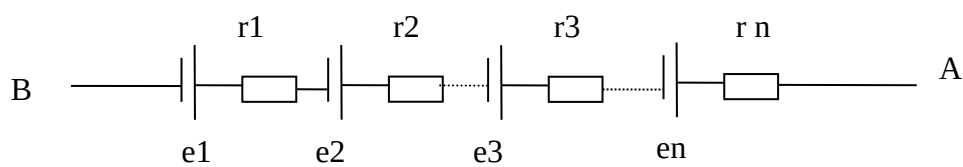
r est la résistance interne du générateur

Exemple de générateur : courant et tension continu

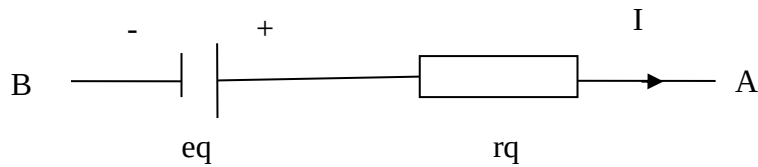


Grouperment de générateurs

En série



Est équivalent à



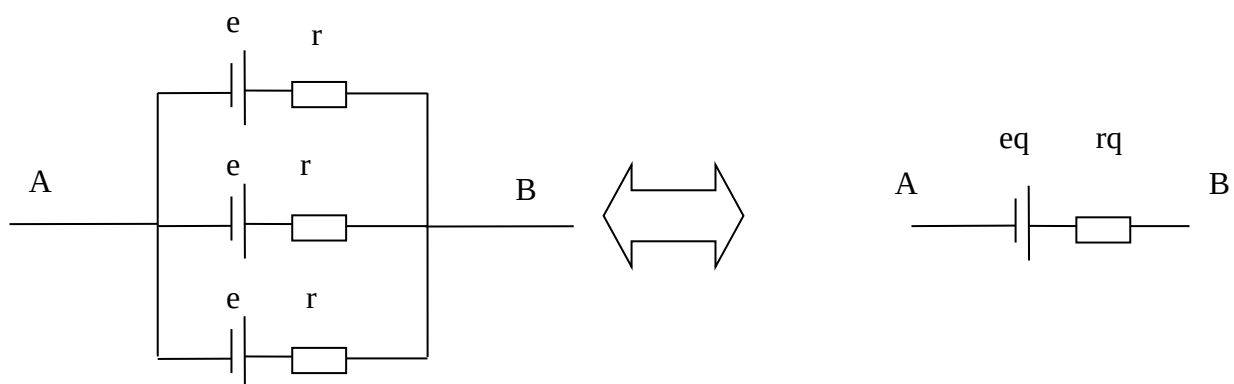
Si n est le nombre total de générateurs

$$e_q = e_1 + e_2 + e_3 + \dots + e_n$$

(Attention au sens des générateurs + dans le sens choisi des e_q , - dans le sens opposé des e_q)

$$r_q = r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n$$

En parallèle



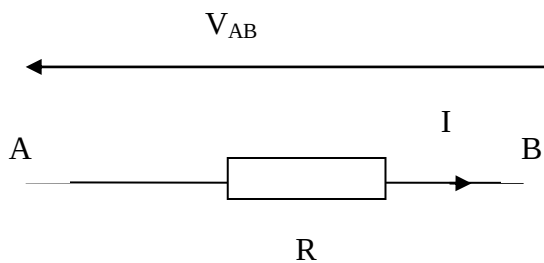
Avec $eq = e$ et $rq = r/n$

3.5 Récepteurs

Un récepteur est un conducteur capable d'emmagasiner ou de transformer l'énergie électrique qu'il reçoit en d'autres formes d'énergie (moteurs...)

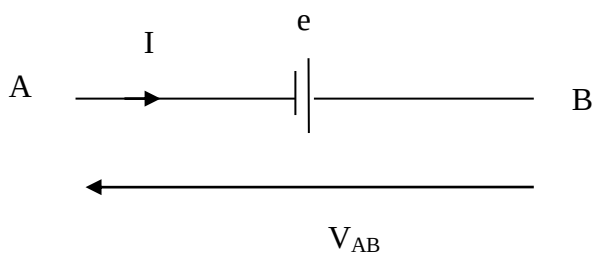
Convention de courant et tension

Dans une résistance (conducteur purement ohmique)



$$V_{AB} = V_A - V_B = RI$$

Dans un générateur :



$$V_{AB} = V_A - V_B = -e$$

Chapitre 2 : Analyse des circuits en courant continu

1 Loi de Kirschhoff

1.1 Définitions

Une branche est une constituée d'un ensemble de dipôles connectés ensemble et traversés par le même courant.

Un nœud est le point de jonction de trois conducteurs au moins.

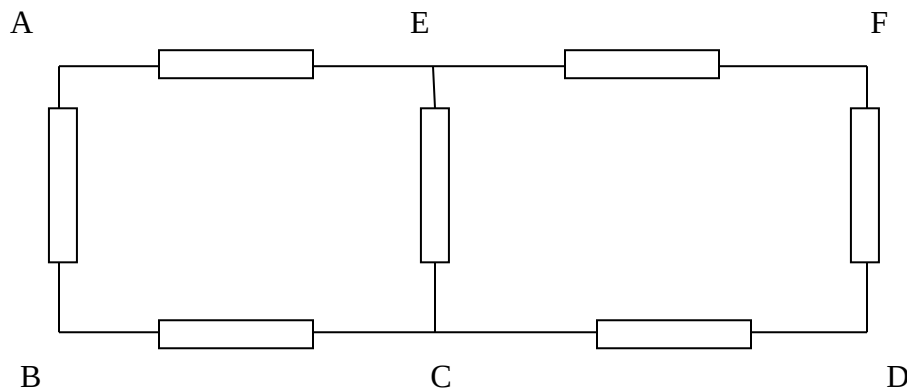
Une maille est un parcours fermé constitué de branches successives du réseau.

Exemple :

Nœuds : E, C

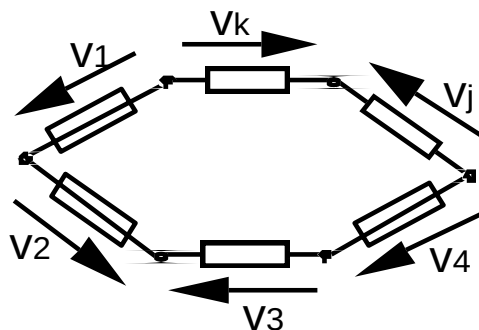
Branches : AB, AE, EF, FD, DC, BC, EC

Mailles : (A,B,C, E) ; (A, E, F, D, C, B) ; (E,F,D,C)



1.2 Loi des mailles

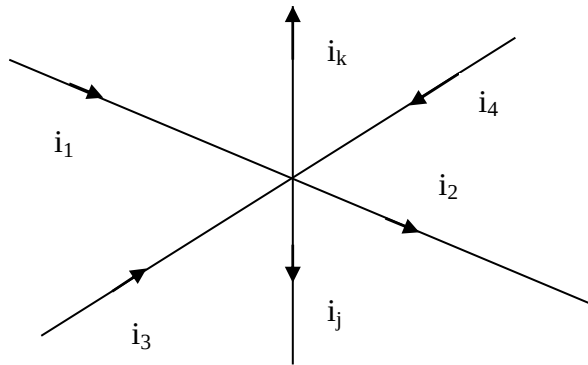
La somme algébrique des tensions des N branches d'une maille est nulle:



$$+ v_1 + v_2 - v_3 - v_4 + v_j - v_k = 0$$

1.3 Loi des Nœuds

La somme algébrique des courants au nœud de N branches, est nulle:

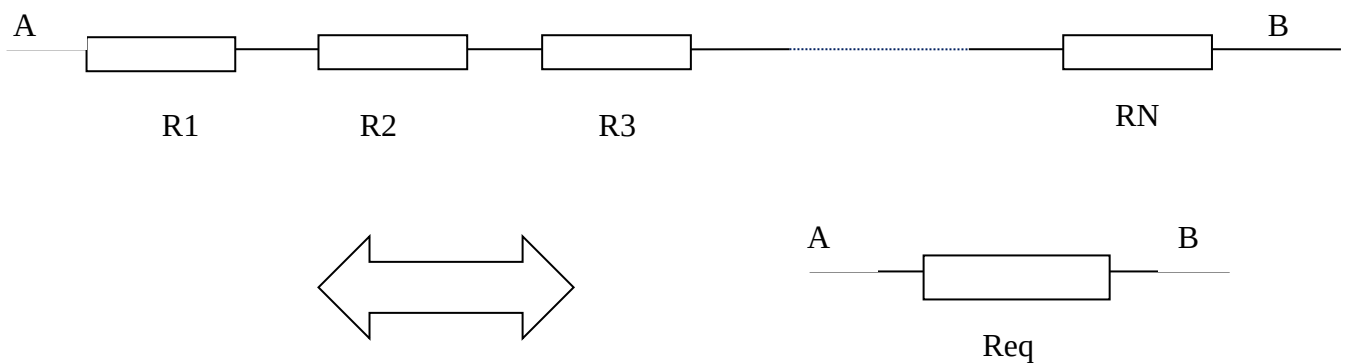


$$+i_1 - i_2 + i_3 + i_4 - i_j - i_k = 0$$

1.4 Résistances en série

Deux dipôles sont en série quand ils ont une borne commune et qu'ils sont traversés par le même courant.

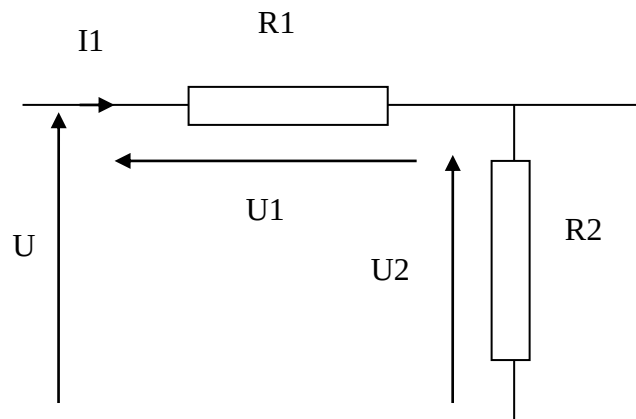
N résistances en série peuvent être remplacées par une résistance dite équivalente égale à la somme des N résistances.



$$Req = \sum_{n=1}^N Rk$$

1.5 Règle du diviseur de tension

Soit le schéma ci-dessous,



Lorsque qu'une tension U est appliquée aux bornes de deux résistances, on peut calculer la tension aux bornes de chaque résistance

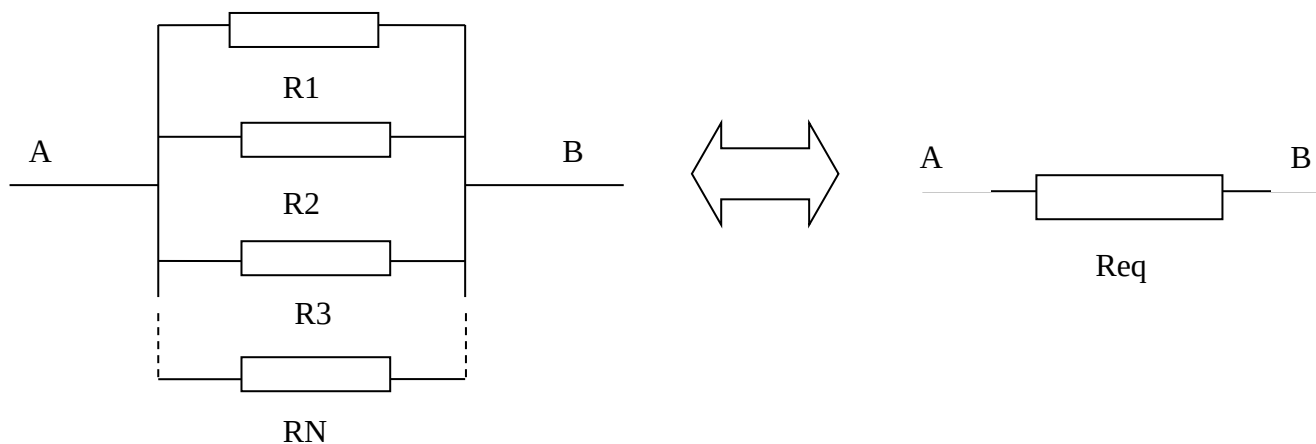
$$I = \frac{U}{(R1+R2)} \text{ et } U2 = R2 I \text{ et } U1 = R1 I \text{ implique que :}$$

$$U2 = U \frac{R2}{R1 + R2} \quad U1 = U \frac{R1}{R1 + R2}$$

1.6 Résistances en parallèle

Des dipôles sont dits en parallèle quand ils ont deux bornes communes, ils ont la même tension à leurs bornes.

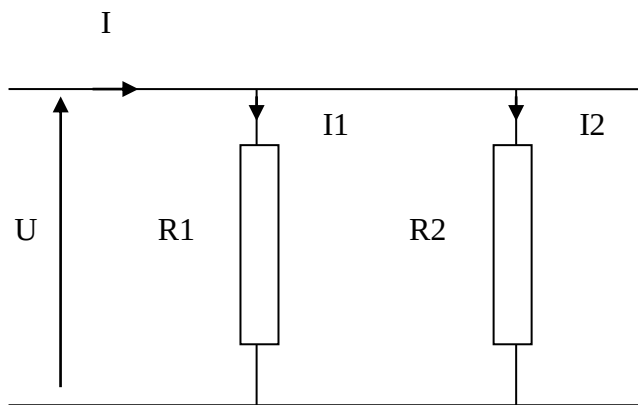
N résistances en parallèles peuvent être remplacées par une résistance dites équivalente.



$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{R_k}$$

1.7 Règle du diviseur de courant

Soit le schéma ci-dessous,



Lorsque qu'un courant I est appliqué aux bornes de deux (N) résistances en parallèle, on peut calculer le courant dans chaque résistance

$I = I_1 + I_2$; $U = R_2 I_1$ et $U = R_1 I_2$ $U = R_{eq} I$ avec $R_{eq} = (R_1 R_2 / (R_1 + R_2))$ mène aux équations

$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

2 Théorèmes

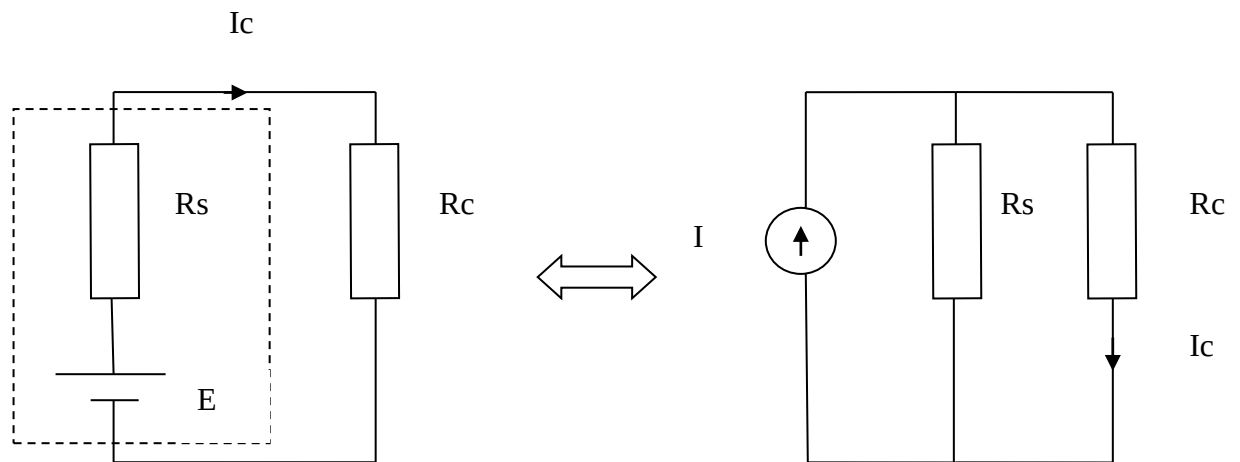
2.1 Transposition des sources

Une source de tension est une source qui a à ses bornes une différence de potentiel constante quel que soit le courant débité.

Une source de courant est une source qui débite un courant constant quelle que soit la tension à ses bornes.

On peut substituer une source de tension à une source de courant, comme on peut substituer une source de courant à une source de tension.

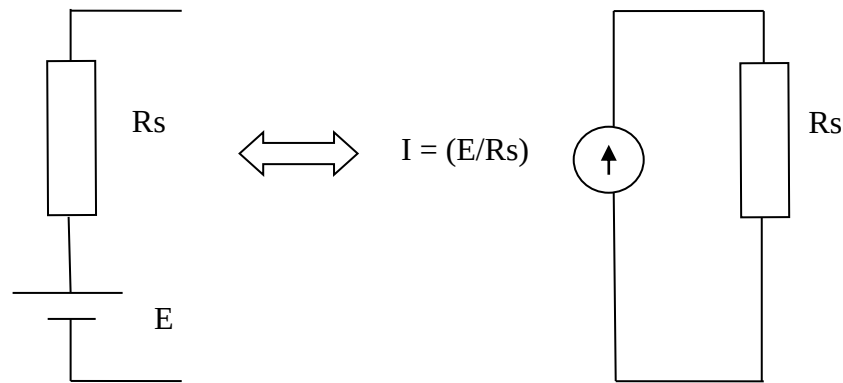
Soit la source de tension avec sa résistance interne R_s qui est connectée à une résistance R_c . Elle peut se transposer en une source de courant en parallèle avec R_s et R_c .



$$I_c = \frac{E}{R_c + R_s} = \frac{\left(\frac{R_s}{R_s}\right)E}{R_s + R_c} = \frac{R_s}{R_s + R_c} \left(\frac{E}{R_s}\right)$$

On peut poser $I = \frac{E}{R_s} I_c$ s'écrit alors $I_c = \frac{R_s}{R_s + R_c} I$ (expression d'un diviseur de courant)

On pourra donc remplacer une source de tension par une source de courant selon le schéma suivant.



2.2 Théorème de Superposition (de Helmholtz)

Dans un réseau linéaire, le courant (ou la tension) créée dans une branche par plusieurs sources indépendantes agissant simultanément, est égal à la somme des courants (ou des tensions) produit(e)s dans cette même branche par les différentes sources agissant isolément.

Méthode : Soit un circuit comportant n sources de tension ou de courant.

- Garder une seule source en éliminant les $(n-1)$ sources. Eliminer une source implique court-circuiter les sources de tension, remplacer par un circuit ouvert les sources de courant.
- Calculer les grandeurs (tension ou courant) entre les bornes demandées.
- Refaire la même procédure avec chaque source.
- Le courant total (ou la tension totale) entre les bornes demandées est la somme algébrique de tous les courants (ou tensions) calculés précédemment

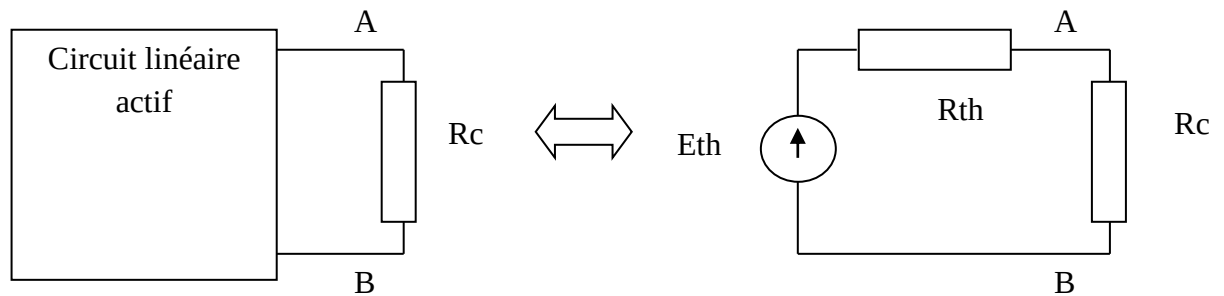
2.3 Théorème de Thévenin

Tout circuit linéaire actif, vu entre deux bornes A et B, peut être remplacé par une source de tension E_{th} en série avec une résistance R_{th} .

Méthode : retirer du réseau la branche où sera raccordée les générateurs.

La tension de Thévenin équivalente E_{th} est la tension en circuit ouvert entre les bornes A et B.

La résistance équivalente de Thévenin R_{th} est la résistance totale entre les deux bornes A et B, les générateurs de tension sont court-circuités et les générateurs de courant sont remplacés par des circuits ouverts.



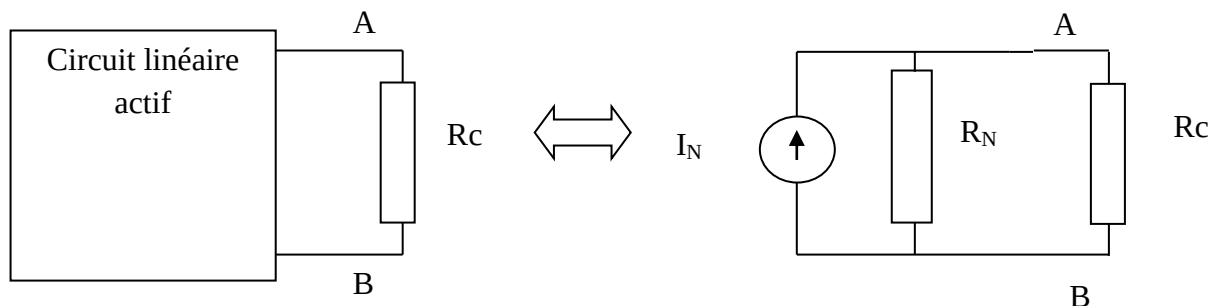
2.4 Théorème de Norton

Tout circuit linéaire actif, vu entre deux bornes A et B, peut être remplacé par une source de courant I_N en parallèle avec une résistance R_N .

Méthode : retirer du réseau la branche ou sera raccordée les générateurs.

La source de courant I_N est égale au courant de court-circuit circulant entre les points A et B

La résistance équivalente de Norton R_N est la résistance totale entre les deux bornes A et B, les générateurs de tension sont court-circuités et les générateurs de courant sont remplacés par des circuits ouverts.



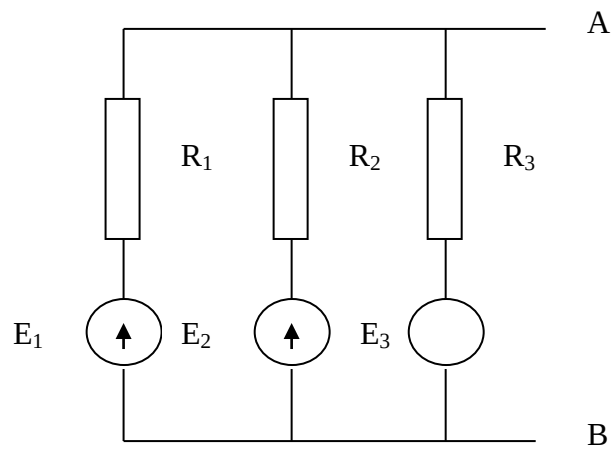
2.5 Equivalence entre modèle de Thévenin et de Norton

Un modèle de Thévenin est équivalent au modèle de Norton si

$$E_{th} = R_N I_N \text{ et } R_{th} = R_N$$

2.6 Théorème de Millman

Le théorème de Millman permet de remplacer plusieurs sources de tension par une seule.



$$\frac{\frac{E}{R_1} + \frac{E}{R_2} + \frac{E}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = V_{AB}$$

Chapitre 3 : Analyse des circuits en régime sinusoïdal

1 Caractéristique d'une grandeur Sinusoïdale

1.1 Définition d'une grandeur sinusoïdale

Un courant sinusoïdal est un courant dont l'intensité s'écrit :

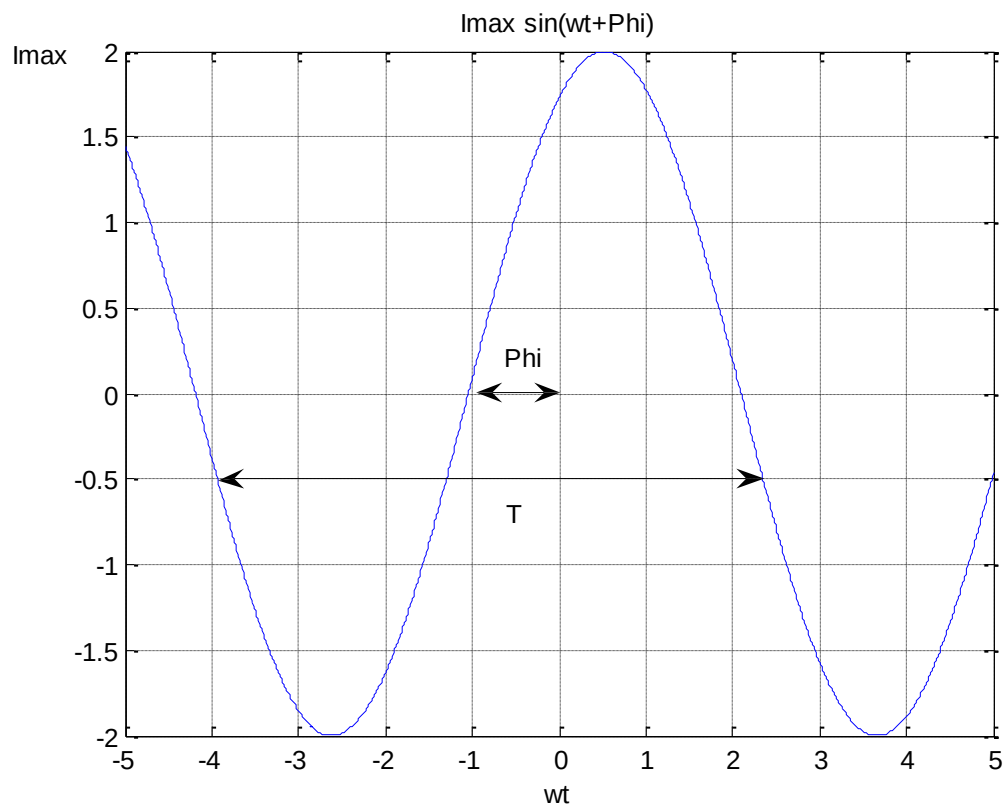
$$i = I_{\max} \sin(\omega t + \varphi)$$

$I_{\max}$ est l'amplitude maximale du courant

ω est la pulsation en radian s^{-1}

φ est la phase à l'origine (quand $t=0$) exprimée en degré ou en radian.

Une onde sinusoïdale se représente de la façon suivante :

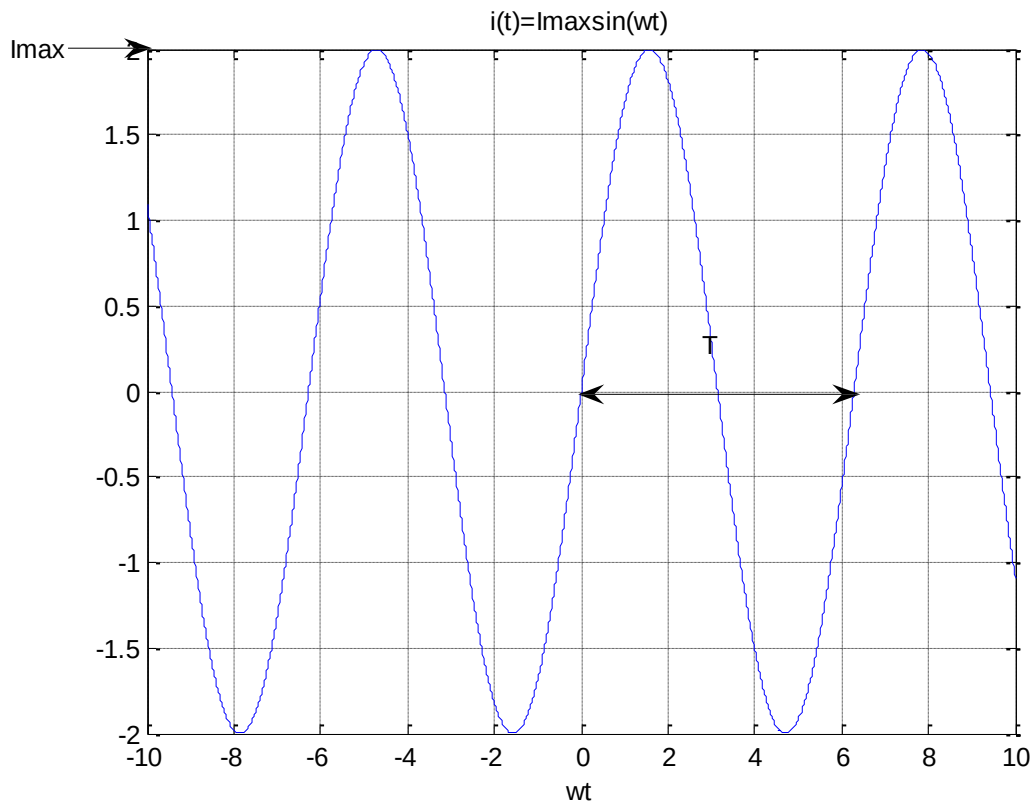


Un courant sinusoïdal est un courant périodique de période T (en seconde).

La fréquence du signal $f = \frac{1}{T}$ s'exprime en Hertz

La pulsation $\omega = 2 \pi f$

Si la phase à l'origine est nulle $i = I_{\max} \sin(\omega t)$, la fonction se représente de la façon suivante :



1.2 Valeur moyenne

Un courant alternatif est un courant périodique dont la valeur moyenne de l'intensité instantanée est nulle sur une période.

$$I_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt$$

$$I_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \int_0^T I_{\max} \sin(\omega t) dt = 0$$

1.3 Valeur efficace

La plupart des ampèremètres ou voltmètres mesurent et affichent la valeur efficace du courant ou de la tension. La valeur efficace d'une tension sinusoïdale (ou d'un courant sinusoïdal) est égale à la tension continue (courant continu) qui dégage la même quantité de chaleur dans une résistance. Physiquement, les voltmètres (ou ampèremètres) mesurent la chaleur dégagée par une onde sinusoïdale.

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$$

$$I_{eff} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$$

2 Loi d'Ohm généralisée

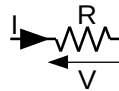
2.1 Impédance, admittance

Pour un circuit linéaire passif, on généralise la loi d'Ohm en définissant l'impédance $Z = \frac{u}{i}$ qui s'exprime en ohm

L'admittance est l'inverse de l'impédance $Y = \frac{i}{u}$, elle s'exprime en Siemens (ohm^{-1})

2.2 Comportement d'une résistance

L'impédance d'une résistance de valeur R est $Z=R$. Le courant et la tension sont en phase.



2.3 Comportement d'une bobine

Si on fait circuler un courant électrique I dans une bobine à n spires, il y a création d'une induction électromagnétique $\vec{B}$ dont la valeur est proportionnelle à l'intensité du courant $\vec{I}$. L'ensemble des spires canalise les lignes d'induction, ce qui donne un flux d'induction $\vec{\Phi}$.

$$\vec{\Phi} = \vec{B} \cdot S$$

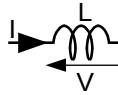
S est la section droite de la bobine.

Soit un circuit fermé, traversé par un flux, lorsque l'on fait varier ce flux, le circuit devient le siège d'un courant induit i . Le sens du courant induit est tel que le flux qu'il produit à travers le circuit qu'il parcourt tend à s'opposer à la variation du flux qui lui donne naissance. Il apparaît une force électromagnétique e telle que

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

Le raisonnement inverse est aussi valable, si on applique une tension variable aux bornes d'une bobine d'inductance L (Henry), l'intensité i du courant qui la parcourt est telle que

$$v = L \frac{di}{dt}$$



Si le courant est constant, la tension est nulle. La bobine peut être remplacée par un fil (court-circuit ou interrupteur fermé).

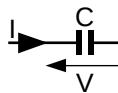
Si i est sinusoïdal, $i = I_{\max} \sin(\omega t)$

$$v = L \frac{dI_{\max} \sin(\omega t)}{dt} = L I_{\max} \omega \cos(\omega t) = L I_{\max} \omega \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

La tension est en avance de $\frac{\pi}{2}$ sur le courant.

2.4 Comportement d'un condensateur

Un condensateur est un composant passif constitué de deux conducteurs (armatures), séparés par un diélectrique ou isolant. Un condensateur est un réservoir d'énergie électrostatique capable d'emmagasiner de l'énergie dans un champ électrique.



Idéalement un condensateur est capable de garder sa charge une fois débranché du circuit.

Si le condensateur est traversé par un courant d'intensité i , la quantité de charges stockées pendant un intervalle de temps dt considéré constant est :

$$dQ = i dt = C du \text{ (en coulomb)}$$

C est la capacité à accumuler les charges en Farad (F). Pour un condensateur plan constitué de deux armatures de même surface S séparé par un diélectrique de permittivité relative ϵ_r et d'épaisseur l

$$C = \frac{S \epsilon_0 \epsilon_r}{l} \text{ avec } \epsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9}$$

ϵ_0 est la permittivité du vide.

Si on applique une tension variable u ($u = U_{\max} \sin(\omega t)$) aux bornes d'un condensateur de capacité C , l'intensité i du courant qui parcourt les fils conducteurs auxquels sont branchées les armatures est telle que

$$i = C \frac{du}{dt}$$

$$i = C \frac{d(U_{\max} \sin(\omega t))}{dt} = C U_{\max} \omega \cos(\omega t) = C \omega U_{\max} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Le courant est en avance de $\frac{\pi}{2}$ sur la tension.

2.5 Loi d'ohm généralisé, impédance d'un dipôle

Pour simplifier l'étude des circuits, on utilise la représentation complexe.

En régime sinusoïdal, la tension et le courant peuvent s'écrire

$$u(t) = U_{\max} \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$i(t) = I_{\max} \cos(\omega t + \varphi_2)$$

Le rapport $u(t)$ et $i(t)$ n'est pas significatif du comportement du dipôle car il dépend du temps.

Les tensions et les courants peuvent être représentés par les grandeurs complexes :

$$u(t) = \text{Re} (U_{\max} e^{j\varphi_1} e^{j\omega t}) = \underline{U}_{\max} e^{j\omega t}$$

$$i(t) = \text{Re} (I_{\max} e^{j\varphi_2} e^{j\omega t}) = \underline{I}_{\max} e^{j\omega t}$$

$\underline{U}_{\max}$ et $\underline{I}_{\max}$ sont appelés amplitudes complexes. $\underline{U}_{\max} = U_{\max} e^{j\varphi_1}$, $\underline{I}_{\max} = I_{\max} e^{j\varphi_2}$

Pour un circuit linéaire passif, on généralise la loi d'ohm en définissant l'impédance

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}_{\max}}{\underline{I}_{\max}} = \frac{U_{\max} e^{j\varphi_1}}{I_{\max} e^{j\varphi_2}} \frac{U_{\max}}{I_{\max}} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} = Z e^{j\phi} = R + jX$$

$$Z = \frac{U_{\max}}{I_{\max}} \text{ et } \phi = (\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\underline{Z} = R + jX$$

La partie imaginaire X s'appelle la réactance.

Impédance d'une résistance

L'impédance d'une résistance est R ; son module est constant, son argument est nul. Les courant et tensions sont en phase.

$$|Z| = R, \phi = 0$$

Impédance d'une bobine

La tension aux bornes d'une bobine $u = L I_{\max} \omega \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$

$$|Z| = \frac{U_{\max}}{I_{\max}} = L \omega \text{ et } \phi = \frac{\pi}{2}$$

Dans la suite de ce document, par souci de simplicité, nous noterons, Z l'impédance complexe.

$$Z_L = jL \omega$$

Impédance d'un condensateur

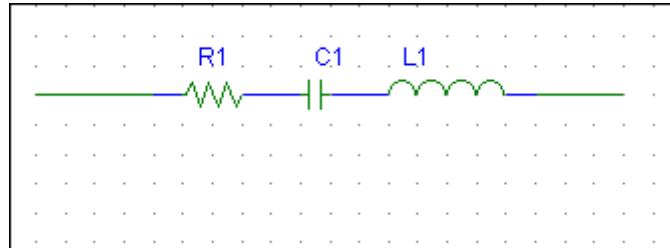
L'intensité du courant est $i = C \omega U_{\max} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$

$$|Z| = \frac{U_{\max}}{I_{\max}} = \frac{1}{C \omega} \text{ et } \phi = -\frac{\pi}{2}$$

L'impédance complexe d'un condensateur

$$Z_C = \frac{1}{jC\omega} = -\frac{j}{C\omega}$$

2.6 Circuit RLC série



Les composants sont en série, nous pouvons additionner les impédances

$$Z_T = Z_R + Z_C + Z_L$$

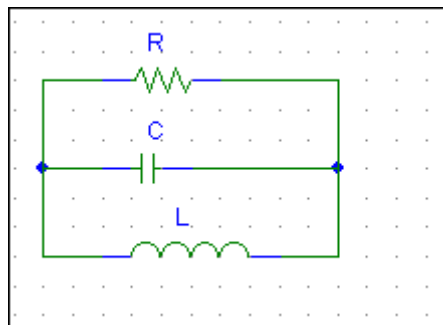
$$Z_T = R + (1/jC\omega) + jL\omega = R + j(L\omega - 1/C\omega)$$

$$|Z_T| = \sqrt{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2} \text{ et } \tan \phi = \frac{(L\omega - 1/C\omega)}{R}$$

donc

$$\phi = \tan^{-1} \frac{(L\omega - 1/C\omega)}{R} = \arctg \frac{(L\omega - 1/C\omega)}{R}$$

2.7 Circuit RLC parallèle



Les composants sont en parallèle, nous pouvons additionner les admittances

$$Y_T = Y_R + Y_C + Y_L$$

$$(1/Z_T) = (1/Z_R) + (1/Z_C) + (1/Z_L)$$

4 Puissances en régime sinusoïdales

4.1 Puissance dans les dipôles élémentaires.

4.1.1 Puissance dans une résistance

$$P(t) = u(t).i(t) = U.I. = RI^2 = U^2/R$$

4.1.2 Puissance dans un condensateur

$$P(t) = u(t).i(t) = C u(t) \frac{du(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} C u^2 \right]$$

$$W_c = \int_0^t p(t) dt = \frac{1}{2} C u^2 \text{ en Joule}$$

W_c est l'énergie accumulée par le condensateur au bout d'un temps t .

4.1.3 Puissance dans une bobine

$$P(t) = u(t).i(t) = L \frac{di(t)}{dt} i(t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} L i^2 \right]$$

$$W_L = \int_0^t p(t) dt = \frac{1}{2} L i^2 \text{ en Joule}$$

W_L est l'énergie accumulée par l'inductance.

4.2 Puissance instantanée

Soit un dipôle passif, traversé par un courant sinusoïdal $i(t)$ et qui a à ces bornes une tension $u(t)$. Nous définissons plusieurs types de puissances.

La puissance instantanée est définie par

$$p(t) = u(t).i(t) \text{ en watt (W)}$$

Si $p(t)$ est positive, l'énergie est fournie par le dipôle, il est récepteur.

Si $p(t)$ est négative, le dipôle renvoie de l'énergie, il est dit générateur.

Nous pouvons exprimer les tensions et courants sinusoïdaux de la façon suivante :

$$i(t) = I_{\max} \cos(\omega t + \Phi_1) \text{ et } u(t) = U_{\max} \cos(\omega t + \Phi_2)$$

$$p(t) = U_{\max} I_{\max} [\cos(\omega t + \Phi_1) \cos(\omega t + \Phi_2)]$$

$$p(t) = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}} \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} [\cos(\Phi_2 - \Phi_1) + \cos(2\omega t + \Phi_1 + \Phi_2)]$$

$$p(t) = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} [\cos(\Phi_2 - \Phi_1) + \cos(2\omega t + \Phi_1 + \Phi_2)]$$

La puissance instantanée comporte un terme constant $U_{eff} I_{eff} \cos(\Phi_2 - \Phi_1)$ et un terme sinusoïdal $U_{eff} I_{eff} \cos(2\omega t + \Phi_1 + \Phi_2)$. La pulsation de la puissance instantanée est deux fois la pulsation du signal sinusoïdal.

4.3 Puissance moyenne

La puissance moyenne sur une période est définie par

$$P_{moy} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} i(t) u(t) dt$$

On l'appelle également puissance active

$$P_{moy} = P_{active} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} U_{eff} I_{eff} [\cos(\Phi_2 - \Phi_1) + \cos(2\omega t + \Phi_1 + \Phi_2)] dt$$

$$P_{active} = \frac{1}{T} U_{eff} I_{eff} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos(\Phi_2 - \Phi_1) dt + \frac{1}{T} U_{eff} I_{eff} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos(2\omega t + \Phi_1 + \Phi_2) dt$$

Le deuxième terme de l'équation est nul, il ne reste que les termes indépendants du temps.

$$P_{active} = \frac{1}{T} U_{eff} I_{eff} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos(\Phi_2 - \Phi_1) dt = \frac{U_{max} I_{max}}{2} \cos(\Phi_2 - \Phi_1)$$

$$P_{active} = U_{eff} I_{eff} \cos(\varphi)$$

φ représente le déphasage entre le courant circulant dans le dipôle et la tension à ses bornes. $\cos(\varphi)$ s'appelle facteur de puissance, il est compris entre 0 et 1.

La puissance active est maximale dans le cas d'une résistance pure $\cos(\varphi) = 1$. Elle est nulle dans le cas d'une bobine ($\varphi = \frac{\pi}{2}$) ou d'un condensateur ($\varphi = -\frac{\pi}{2}$).

4.4 Puissance active et puissance réactive

La puissance instantanée s'écrit

$$p(t) = U_{eff} I_{eff} [\cos(\Phi_2 - \Phi_1) + \cos(2\omega t + \Phi_1 + \Phi_2)]$$

Pour simplifier les calculs nous supposons $\Phi_1 = 0$. Dans ce cas $\Phi_2 = \Delta\phi$

$$p(t) = U_{eff} I_{eff} [\cos(\Delta\phi) + \cos(2\omega t + \Delta\phi)]$$

$$p(t) = U_{eff} I_{eff} \cos(\Delta\phi) + U_{eff} I_{eff} \cos(2\omega t + \Delta\phi)$$

$$p(t) = U_{eff} I_{eff} \cos(\Delta\phi) + U_{eff} I_{eff} (\cos(2\omega t)\cos(\Delta\phi) - \sin(2\omega t)\sin(\Delta\phi))$$

$$p(t) = U_{eff} I_{eff} (1 + \cos(2\omega t))\cos(\Delta\phi) - U_{eff} I_{eff} \sin(2\omega t)\sin(\Delta\phi)$$

La puissance instantanée contient deux termes l'un correspondant à la puissance active (valeur moyenne non nulle), le second à la puissance réactive (valeur moyenne nulle).

$$p(t) = P (1 + \cos(2\omega t)) + Q \sin(2\omega t)$$

P, puissance active correspond à la puissance moyenne sur une période. Elle correspond à l'énergie consommée ou produite par le circuit. Elle représente l'énergie facturée par le distributeur. Elle s'exprime en Watt (W).

Q, La puissance réactive correspond à l'énergie échangée entre le circuit et l'extérieur. Le circuit doit comporter des éléments réactifs qui emmagasinent de l'énergie pendant une moitié de période pour la restituer intégralement pendant la seconde moitié. Q s'exprime en V.A.R (Volt Ampère Réactif)

Supposons une impédance $Z = R + jX$

En notation complexe, la tension aux bornes de l'impédance

$$u(t) = \Re [U_{\max} e^{j\varphi} e^{j\omega t}]$$

$$u(t) = \Re [R + jX] I_{\max} [\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)]$$

$$u(t) = R I_{\max} \cos(\omega t) - X I_{\max} \sin(\omega t)$$

$$p(t) = u(t) i(t) = [R I_{\max} \cos(\omega t) - X I_{\max} \sin(\omega t)] [I_{\max} \cos(\omega t)]$$

$$p(t) = \frac{R I_{\max}^2}{2} (1 + \cos(2\omega t)) - \frac{X I_{\max}^2}{2} \sin(2\omega t)$$

$$P_{\text{active}}(t) = \frac{R I_{\max}^2}{2} (1 + \cos(2\omega t))$$

$$P_{\text{reactive}}(t) = \frac{X I_{\max}^2}{2} \sin(2\omega t)$$

Déterminons les puissances actives et réactives des éléments simples.

Résistance

$$P = R I_{\text{eff}}^2$$

$$Q = 0$$

Bobine

$$P = 0$$

$$Q = L \omega I_{\text{eff}}^2$$

Une bobine absorbe de l'énergie réactive

Condensateur

$$P = 0$$

$$Q = - \frac{I_{\text{eff}}^2}{C \omega}$$

Un condensateur fournit de l'énergie réactive

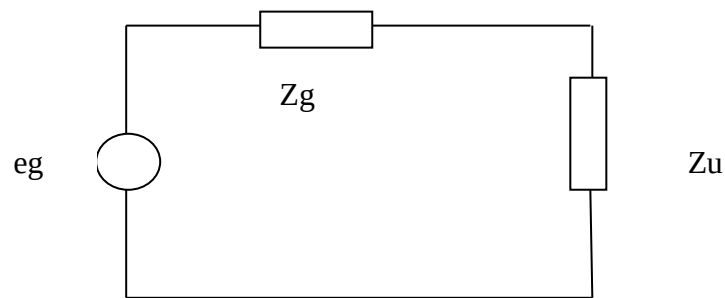
4.5 Complément sur les puissances

Théorème de Boucherot

La puissance active fournie à un dipôle est égale à la somme des puissances actives consommées par les différents éléments qui constituent le dipôle. La puissance réactive échangée avec un dipôle est égale à la somme des puissances réactives échangées par les différents éléments qui constituent le dipôle.

Puissance maximale transférée.

Soit le circuit suivant constitué d'un générateur de tension de tension sinusoïdal e_g , d'impédance interne Z_g ($Z_g = R_g + jX_g$) connecté à une charge d'impédance Z_u ($Z_u = R_u + jX_u$).



La puissance active consommée par Z_u est maximale si $Z_u = Z_g^*$ (Z_u^* nombre complexe conjugué).