

Revision Algèbre linéaire 1/

Matrice échelonnée: ① Dans toute ligne non nulle, le premier élément (en lisant de gauche à droite) non nul vaut 1, on l'appelle le 1 directeur.

② Les lignes nulles sont regroupées au bas de la matrice.

③ Dans 2 lignes non nulles successives, le 1 directeur de la ligne inférieure est situé plus à droite que celui de la ligne supérieure.

Échelonnée réduite: Dite réduite lorsque toute colonne qui a un 1 directeur a des 0 partout ailleurs.

Théorème: Résolution d'un système dont la matrice augmentée est échelonnée réduite.

→ Les Variables correspondant à des 1 directeurs sont appelées variables directrices, les autres sont appelées variables libres.

Variables libres = infinité de solutions

Variable directrice s'exprime en fonction des variables libres.

Système homogène: $\vec{0} \cdot (0, 0, 0 \dots 0) = 0_{\mathbb{R}^n}$ est toujours solution qu'on appelle la solution triviale.

→ Donc un système homogène n'est jamais incompatible puisqu'il admet au moins la solution triviale.

Et la deuxième solution est une infinité de solution.

Lorsque $p < n$, il y a moins d'équation que d'inconnus, on

est forcément dans le cas d'une infinité de solutions.

Formule du produit: On multiplie $A \in \text{clbpn}(\mathbb{R})$ par $B \in \text{clbnq}$ (nb de Colonne de A égale aux nb de ligne de B).
 $AB = C \in \text{clbpq}(\mathbb{R})$.

Matrice unité de taille n:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\forall A \in \text{clbpn}(\mathbb{R}) \\ A I_n = I_p A = A.$$

→ Toute matrice peut être vue comme un ensemble de colonnes ou un ensemble de lignes.

Théorème: Soit $A \in \text{clbpn}(\mathbb{R})$ et $B \in \text{clbnq}(\mathbb{R})$
où $B = (B_1 \ B_2 \ \dots \ B_q)$

$$AB = (AB_1 \ AB_2 \ \dots \ AB_q).$$

Exo: Soient deux matrices $A \in \text{clbpn}$ $B \in \text{clbnq}$.

- ①. Montrez que si la 1^{ère} Colonne de B est nulle alors la 1^{ère} Colonne de AB aussi.
- ②. même question pour la k-ième colonne de B.
- ③. Énoncez une condition suffisante sur une ligne de A pour que la 1^{ère} ligne AB soit nulle.
Est-elle nécessaire donner un contre-exemple.

$$\textcircled{1}. AB = (AB_1 \ AB_2 \ \dots \ AB_q) \\ \text{Si } B_1 = 0 \text{ alors } AB_1 = 0.$$

$$Ax_0 = 0.$$

$$\textcircled{2}. AB = (AB_1 \ AB_2 \ \dots \ AB_k \ \dots \ AB_q)$$

③ Il suffit que la 1^{ère} ligne de A soit nulle.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = B$$

Exo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Calculer A^2 A^3

2) Énoncer une conjecture sur A^k et la démontrer.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 16 & 16 & 16 & 16 \\ 16 & 16 & 16 & 16 \\ 16 & 16 & 16 & 16 \\ 16 & 16 & 16 & 16 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = 4^{2-1} A$$

$$A^3 = 4^{3-1} A$$

Réurrence: $H_k: A^k = 4^{k-1} A$

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k A = A A^k = A 4^{k-1} A \\ &= 4^{k-1} A^2 \\ &= 4^{k-1} \times 4 \times A \\ &= 4^k A. \end{aligned}$$

Exo Bis:

1) Calculer A^2

2) Calculer A^n avec une conjecture et récurrence.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 6 \\ -12 & 24 & -12 \\ 6 & -12 & 6 \end{pmatrix}$$

Initialisation: $A^2 = 6A$

Proposition au rang n: $A^n = 6^{n-1} A$

$$\begin{aligned} H_n \Rightarrow H_{n+1}: A^{n+1} &= 6^{n-1} A^2 \\ &= 6^{n-1} 6A \\ &= 6^n A. \text{ soit } H_{n+1}. \end{aligned}$$

Matrice Inversible: Une Matrice $A \in \text{M}_{nn}(\mathbb{R})$ est inversible si $\exists B \in \text{M}_{nn}(\mathbb{R}) : AB = BA = I_n$.
 B sera alors unique et noté A^{-1} .

Exercice: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, écriv $AB = I_2$
 ou $BA = I_2$.
 et en déduire B .

$$\begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ 5a+3c & 5b+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a+c=1 \\ 2b+d=0 \\ 5a+3c=0 \\ 5b+3d=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} 6a+3c - 5a-3c &= 3 \Leftrightarrow a=3 \\ 6b+3d - 5b-3d &= -1 \Leftrightarrow b=-1 \\ c &= -5 \\ d &= 2 \end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice: $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Calculer Q^2 et en déduire si Q est inversible

$$Q^2 = 2I_4 \quad Q^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$QQ = 2I_4$$

$$Q \times \left(\frac{1}{2}Q\right) = I_4$$

$$Q \text{ est inversible } Q^{-1} = \frac{1}{2}Q$$

Théorème: Pour $A \in \text{M}_{nn}(\mathbb{R})$ les propositions suivantes sont équivalentes.

- 1). A est inversible
- 2). $\forall b \in \text{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$ (matrice colonne), le système $AX=b$ possède une unique solution qui vaut $X = A^{-1}b$

Révision Algèbre Linéaire 21.3

3). La matrice échelonnée réduite équivalente à A est I_n .

Exemple: Inverse $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On résout $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. La matrice augmentée est:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & a \\ 0 & 2 & -1 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & a+b \\ 0 & 2 & 0 & b+c \\ 0 & 0 & 1 & c \end{pmatrix} \begin{matrix} l_1 + l_2 \\ l_2 + l_3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a/3 + b/3 \\ 0 & 1 & 0 & b/2 + c/2 \\ 0 & 0 & 1 & c \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M^{-1}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Remarque: Une matrice triangulaire est inversible si les termes de la diagonale sont nuls.

Transposée: Soit $A \in \text{M}_n(\mathbb{R})$ on note ${}^tA$ la matrice de $\text{M}_n(\mathbb{R})$ en échangeant les lignes et les colonnes de A .

Exos $X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \text{M}_{1,n}(\mathbb{R})$

- a) Calculer $X^t X \rightarrow$ nb de lignes et de colonnes
- b) Calculer ${}^t X X \rightarrow$ nb de lignes et de colonnes

$$A_{p,n} B_{n,q} = C_{p,q}$$

a). $X_{1,n} \times {}^t X_{n,1} = C_{1,1}$

b). ${}^t X_{n,1} \times X_{1,n} = C_{n,n}$

Définition: Une matrice $A \in \text{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique (resp. antisymétrique) si ${}^t A = A$ (resp. ${}^t A = -A$).
• ${}^t(AB) = {}^t B \cdot {}^t A$.

- Si $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ est inversible alors ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$

Exo: 1) Soit une matrice quelconque notée que:

- $1/2 (U + {}^tU)$ est symétrique.
 - $1/2 (U - {}^tU)$ est antisymétrique.
 - ${}^t(1/2 (U + {}^tU)) = 1/2 {}^t(U + {}^tU)$
 $= 1/2 ({}^tU + {}^t({}^tU))$
 $= 1/2 ({}^tU + U)$ donc elle est symétrique.
 - ${}^t(1/2 (U - {}^tU)) = 1/2 ({}^t(U - {}^tU))$
 $= 1/2 ({}^tU - {}^t({}^tU))$
 $= 1/2 ({}^tU - U)$ donc elle est antisymétrique.
- Toute matrice $n \times n$ peut se décomposer en une sym + antisym.

Déterminants:

- Déterminant d'une matrice $A \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$.
 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Théorème: Cas où le calcul se simplifie.

- 1) Si A possède une ligne ou une colonne nulle alors $\det A = 0$.
- 2) Si A possède deux lignes ou deux colonnes proportionnelles alors $\det A = 0$.
- 3) Si A est triangulaire (sup. ou inf.) alors le déterminant vaut le produit des termes diagonaux. // s'applique aussi aux matrices diagonales.

Déterminant et Inversibilité:

- 1). Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, A est inversiblessi $\det A \neq 0$.
- 2). Si $\det A \neq 0$ alors $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

$$\rightarrow \det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

$$\forall A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), \det {}^t A = \det A.$$

Exo: 1). Soient A et $B \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, on suppose $\det(AB) = 0$, montrez que l'une des deux n'est pas inversible.

2) Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, Montrez ${}^t A A \geq 0$.

3) A, B, M trois matrices $n \times n$, M inversible, $A = M^{-1} B M$, comparez $\det A$ et $\det B$.

4) Que pensez-vous de l'égalité $\det(A+B) = \det A + \det B$?

1). $\det(AB) = \det A$ et $\det B = 0$ si $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$
 $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$. intégrité $\mathbb{R}[x]$.

$$2). \det({}^t A A) = \det({}^t A) \times \det(A) = (\det A)^2 \geq 0.$$

$$3). \det A = \det M^{-1} \det B \det M \\ = \det B \det M^{-1} \det M \text{ mais } \det M^{-1} = \frac{1}{\det M} \\ \det A = \det B.$$

4). Contre exemple dans $\text{GL}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mineur et Cofacteurs: Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$

On appelle mineur de l'élément a_{ij} le déterminant de la matrice extraite de A en supprimant la ligne i et la colonne j , on la note M_{ij} .

Le Cofacteur vaut $(-1)^{i+j} M_{ij}$.

Calcul d'un déterminant grâce au développement:

1). dvp par rapport à la ligne i :

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} M_{ij}$$

2). dvp par rapport à la Colonne j :

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Règles de Calcul des déterminants :

- La valeur d'un det ne change pas si on ajoute à une colonne (resp. une ligne) une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. une ligne).
- L'échange de deux lignes (resp. colonnes) multiplie le det par -1 .
- Si on multiplie une colonne (resp. une ligne) par $k \in \mathbb{R}$, le det est multiplié par k .
- Si on multiplie tous les éléments par k , le det est multiplié par k^n .

Système de Cramer :

- Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, $B \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et le système $AX=B$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Le système est dit de Cramer si $\det A \neq 0$.

Matrice modifiée A_j : Avec les notations de la définition précédente, on appelle (pour tout j) A_j la matrice obtenue en remplaçant la j -ème colonne de A par la Colonne B .

Revisión Álgebra lineal 31.5

Théorème: Formule de Cramer, elles permettent de calculer $x_1, x_2, \dots, x_n$ qui sont les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
 $x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$ ($\det A \neq 0$ puisque $AX = B$ est de Cramer).

Ex: deux dim

Réolvons: $\begin{cases} 3x + 7y = 2 \\ 2x + 5y = 3 \end{cases}$ avec les formules de Cramer. Mettons sous la forme $AX = B$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \det A = \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

$$\det A_1 = \Delta x = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -11 \quad x = \frac{\det A_1}{\det A} = -11.$$

$$\det A_2 = \Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \quad y = \frac{\det A_2}{\det A} = 5.$$

Exo: $AX = B$ avec A inversible, que vaut X en fonction de A^{-1}

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$IX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B.$$

Exo: Résolve avec les formules de Cramer.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ x + 2y - z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{Cramer}} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{Cramer}} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \quad x = \frac{\Delta x}{\Delta} = 4/3.$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad y = 0.$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Espace $\mathbb{R}^n$ et applications linéaires:

Espace de dimension n:

- La Droite réelle est un espace de dimension 1.
- Le plan vu au lycée $(0, \vec{i}, \vec{j})$ est un espace de dimension 2.
- On généralise cette notation en considérant un espace de dimension n dont tout élément est représenté par un n-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ou $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Opérations sur les Vecteurs:

Somme: $u + v = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$.

Multiplication externe: $k \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k u_1 \\ k u_2 \\ \vdots \\ k u_n \end{pmatrix} \quad k \in \mathbb{R}.$

Application linéaire:

$$\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_p) \rightarrow (w_1, w_2, \dots, w_n).$$

f est dite linéaire lorsqu'il existe une matrice dans $M_{np}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $X \in \mathbb{R}^p$ $W = AX$.

La matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est appelée matrice standard de l'application f .

Exemple: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans le plan $(\vec{i}, \vec{j})$.

→ Pour tous les couples matrices + application les questions sont les mêmes:

- ① Quel est l'ensemble des vecteurs invariants? $f(V) = V$.
- ② Quel est l'image des Vecteurs.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=y \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{l'ensemble des Vecteurs invariants} \\ \text{est } \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}. \end{array}$$

2). Que valent $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ et $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$?

Composition d'applications linéaires:

Soient deux applications linéaires:

$f_A: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ de matrice A .

$f_B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ de matrice B .

$f_B \circ f_A: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ est une application linéaire de matrice BA .

Exemple: On a $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $\begin{cases} y_1 = 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 \\ y_2 = -x_1 + x_2 + 3x_3 \end{cases}$

$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $\begin{cases} z_1 = 4y_1 - y_2 \\ z_2 = y_1 + 3y_2 \end{cases}$

- écrire les matrices de f et g .
- En déduire la matrice $g \circ f$.
- En déduire l'expression de $g \circ f$.
- Peut-on faire autrement?

a) $f = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -8 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $g = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $g \circ f = \begin{pmatrix} 9 & 19 & -35 \\ -1 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{cases} z_1 = 9x_1 + 19x_2 - 35x_3 \\ z_2 = -x_1 + 8x_2 + x_3 \end{cases}$

d) Oui dans z on remplace par les valeurs de y_1 et y_2 .

Théorème: bijectivité des applications linéaires:

Soit $f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ $A \in \text{cbnn}(\mathbb{R})$.

Les propositions suivantes sont équivalentes:

- ①. A est inversible
- ②. f_A est injective
- ③. f_A est surjective
- ④. f_A est bijective.

Remarque: $(f_A)^{-1} = f_{A^{-1}}$

Exercice: $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ définie par :

$$\begin{cases} y_1 = x_2 \\ y_2 = x_3 \\ y_3 = x_4 \\ y_4 = x_1 \end{cases}$$

- ①. f est elle injective
- ②. Si oui la quelle est sa réciproque.

③. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \det A = -1.$

A est inversible $\Leftrightarrow f_A$ est bijective.

④. $e_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$f(e_1) = e_4 \quad f(e_2) = e_1 \quad f(e_3) = e_2 \quad f(e_4) = e_3.$

grâce à ça on peut déterminer les antécédents de e_1, e_2, e_3, e_4 et donc f^{-1}

$f^{-1}(e_1) = e_2 \quad f^{-1}(e_2) = e_3 \quad f^{-1}(e_3) = e_4 \quad f^{-1}(e_4) = e_1$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Exo: On considère

$y_1 = x_1 + x_2 + x_3$

$y_2 = x_2 + x_3 + x_4$

$y_3 = x_1 + x_3 + x_4$

$y_4 = x_1 + x_2 + x_4$

Essayer de montrer que $AX = \vec{0} \Rightarrow X = \vec{0}$

Revision Algèbre linéaire 6/3

Cours: $AX=B$ si A est inversible.

Combien de solutions a le système $AX=B$?

Pour B donné il existe un unique X tel que $AX=B$.

En particulier quelle est la solution de $AX=0$?

On a l'équivalent A inversible $\Leftrightarrow AX=0$ n'admet que $\vec{0}$ comme solution.

$$\begin{array}{l} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} l_1 - l_3 = x_2 = x_4 \\ l_4 - l_2 = x_1 = 0 \\ l_3 - l_2 = x_1 = x_2 \\ = x_3 = 0. \end{array} \quad \text{donc } x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$
$$S = \{(0, 0, 0, 0)\}.$$

Notation: $(0, 0, 0, 0) = 0_{\mathbb{R}^4}$.

En remarquant que : $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$
donner x_1, x_2, x_3, x_4 en fonction de y_1, y_2, y_3, y_4 .

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - (x_2 + x_3 + x_4) \\ &= \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) - \frac{2}{3}y_2. \end{aligned}$$

Exo: Soit m de matrice standard $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Soit n de matrice standard $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Trouver les vecteurs x tel que $m(x) = n(x)$.

$$m(x) - n(x) = 0 \Leftrightarrow (M - N)X = 0.$$

$$M - N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\det = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \left(2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \right) = -32.$$

On en déduit que $M-N$ est inversible $\Leftrightarrow$ la seule solution de $(M-N)x=0$ est $\{0\}$.

Espaces Vectoriels, bases et dimensions:

On admet que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels (EV) $\mathbb{R}^n$, $M_{n,n}$, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ noté: $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ soit $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

→ Dans tous ces ensembles on a: une addition interne et une multiplication externe.

Propriété: Soit $k \in \mathbb{R}$ (un scalaire) et $u \in V$ (espace Vectoriel) on a:

$$\begin{aligned} 0 \cdot u &= 0 & 0 \cdot u &= 0_v & 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= 0_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ k \cdot 0_v &= 0 & 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour espace Vectoriel: Soit V un espace Vectoriel et W un sous ensemble de V , W est un SEV de V si:

- 1). $0_v \in W$.
- 2). $\forall (u, v) \in W^2, u+v \in W$
- 3). $\forall (k, u) \in \mathbb{R} \times W, ku \in W$.

⚠ Astuce pour gagner du temps en exo: Au lieu de Vérifier ② puis ③ on vérifie: $ku+nv \in W$.

ACT: Soit $n \geq 1$ et S_n l'ensemble des matrices symétriques $n \times n$. Montrez que S_n est un SEV de $M_{n,n}(\mathbb{R})$ (On peut faire ça juste avec une phrase).

Le produit d'une MS par un réel est une MS. La somme de 2 MS est une MS. Donc S_n est un SEV de $M_{n,n}(\mathbb{R})$.

Théorème: Soit $A \in \text{Mat}_{n,p}(\mathbb{R})$, l'ensemble des solutions du système $AX=0$ est un SEV de $\mathbb{R}^p$.

Preuve: Soit X_1 et X_2 deux solutions de $AX=0$. On vérifie que $\forall k \in \mathbb{R}$: $kX_1 + X_2$ est solution.

$$A(kX_1 + X_2) = A kX_1 + A X_2 = 0_{\mathbb{R}^n} + 0_{\mathbb{R}^n} = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

$0_{\mathbb{R}^n}$ est solution de $AX=0$ donc l'ensemble des solutions est bien un SEV de $\mathbb{R}^p$.

Exo: Montrer que l'ensemble $\{f(x), x \in \mathbb{R}^4\}$ est un espace vectoriel.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ système incompatible } S = \emptyset.$$

On montre que I est un SEV de $\mathbb{R}^4$.

1) $\vec{0} \in I$ Car $f(\vec{0}) = 0$.

2) Pour toute application linéaire $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v).$$

On prend $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans I , donc $\exists x_1, \in \mathbb{R}^4$ $\vec{u} = f(x_1)$
 $\exists x_2, \in \mathbb{R}^4$ $\vec{v} = f(x_2)$.

• Quelle pourrait être les antécédents de $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$?

$$\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) = f(\alpha x_1 + \beta x_2).$$

$\alpha x_1 + \beta x_2$ est antécédent de $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \in I$.

$I \ni \vec{0}$ et I est stable par A donc c'est un SEV de $\mathbb{R}^4$.

Exo: $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) g est-elle injective?

2) g est-elle surjective?

3) Déterminer les x tels que $g(x) = 0$.

4) trouver les x tels que

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5) Trouver λ tels que $f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$f: E \rightarrow F$ est injective si

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y \quad f(e_1) = f(e_3) \text{ et } e_1 \neq e_3.$$

2) Écrire $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ en fonction de $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ (le système $Y = BX$).

$$y_1 = y_3 \quad \text{et} \quad y_2 = y_4.$$

$$3) \quad \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$S = \{(-x_3, 0, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

5) Aucun calcul $S = \emptyset$

Combinaison linéaire, famille liée et libre.

Def: Dans un espace vectoriel un vecteur w est appelé combinaison linéaire des vecteurs $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ lorsque il existe des scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ tels que $w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p$.

Théorème et définition: Soient $(v_1, v_2, \dots, v_p)$

des vecteurs de V

l'ensemble W des combinaisons linéaires des vecteurs $(v_1, \dots, v_p)$ (On peut dire des vecteurs de la famille $(v_1, v_2, \dots, v_p)$) est un SEV de V .

On le note $\text{vect}(v_1, v_2, \dots, v_p)$ on dit que c'est un SEV engendré par la famille $(v_1, v_2, \dots, v_p)$.

On dit aussi que $(v_1, \dots, v_p)$ est une famille génératrice.

Exo et Act: Montrons que la famille e_1, e_2, e_3 , est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Revison Algèbre linéaire 5/3

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \varepsilon_1 + \beta \varepsilon_2 + \gamma \varepsilon_3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

on retrouve $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc génératrice.

ACT: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est elle génératrice de $\mathbb{R}^3$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \beta = y \\ \alpha - \gamma = z \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = x - y \\ \beta = y \\ \gamma = \alpha - z \end{cases}$$

On a trouvé α, β, γ tels que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Donc la famille est génératrice.

Famille libre: Soit la famille $S = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ de vecteurs de V .

On dira qu'elle est libre (ou linéairement indépendante) si la seule solution du système $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p = 0$, est $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$.

Autrement dit le système homogène en $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ n'admet que la solution triviale.

Exo:

$$g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

On résout le système $AX = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ a, b, c quelconques.

Et on en conclut sur le caractère injectif/surjectif de f .

1). Cramer: 1 solution unique X_0 (nul au pas) $S = \{X_0\}$

Si $X_0 = \vec{0}$ $AX = \vec{0}$, système homogène.

Dans ce cas la matrice est forcément carrée. **Bijective**

2). Pas de solution, le système implique une équation fautive.

$$Y = \emptyset \quad \begin{cases} x+y=2 \\ x+y=3 \\ x-z=0 \end{cases}$$

Pas surjective

3). Une infinité de solutions Ex: $S = \{(1-x_2, x_2, x_3) \mid (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2\}$

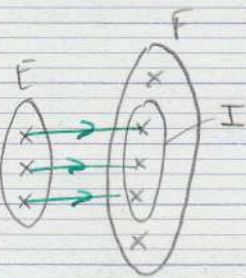
Surjective, pas injective

①

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b \\ 1 & -1 & 1 & 0 & c \end{pmatrix} \xleftarrow{-I_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & a-c \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b \\ 1 & -1 & 1 & 0 & c \end{pmatrix} \xrightarrow{+I_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & a-c \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b \\ 1 & 0 & 2 & 0 & c+b \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} x & y & z & t \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & c+b \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a-c \end{pmatrix} & \begin{cases} x = -2z + c + b \\ y = -z + b \\ t = a - c \end{cases} \end{matrix}$$

$$S = \{(-2z + c + b, -z + b, a - c, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$



2). Déterminer les X de $\mathbb{R}^4$ tels que $AX = 0$.

3). Montrez que l'image de $\mathbb{R}^4$ est un SEV de $\mathbb{R}^3$.

② $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ d'où $S = \{(-2x_3, -x_3, x_3, 0) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$

$g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ g est surjective mais pas injective

g est une application: $E \rightarrow F$.

L'image (direct): $I = \{y \in F, \exists x \in E, f(x) = y\}$

$$I = \{f(x), x \in E\}$$

③ En 1 on a montré que $\forall \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ a une infinité d'antécédent, donc tout les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont dans I .

$I = \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3$ est un SEV de lui-même.

Famille libres et liées:

Si $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ est libre: $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p = \vec{0}$
 $\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$

Remarque: Une famille qui contient le vecteur nul n'est pas libre $\rightarrow$ elle est liée.

On considère la famille $(v_1, \dots, v_{p-1}, \vec{0})$. Elle est liée car le p -uplet $(0, 0, \dots, 0, 1)$ n'est pas le p -uplet et on a bien:
 $0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_{p-1} + 1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

Théorème: Caractérisation d'une famille liée.

Soit dans un espace vectoriel V une famille de vecteurs $S = (v_1, \dots, v_p)$ elle est liée si au moins un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Demo: $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_i v_i + \dots + \lambda_p v_p = \vec{0}$

Comme S est liée on sait: $\exists j \in [1, p] : \lambda_j \neq 0$.

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \dots + \lambda_p v_p = -\lambda_j v_j.$$

$$\Leftrightarrow \lambda_j v_j = -(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p)$$

$$\text{Comme } \lambda_j \neq 0 \quad v_j = -\frac{1}{\lambda_j} (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p).$$

Théorème: Dans $\mathbb{R}^n$ une famille de vecteurs de plus de n éléments est toujours liée.

Argument qui utilise les systèmes homogènes: Le système homogène associé a plus d'inconnues que d'équations donc il a une infinité de solutions. Ce qui signifie qu'il n'admet pas la solution nulle.

Ce qui donne un système homogène $n \times p$ avec $p > n$.

Bases et dimensions:

Base d'un E.V.: Soit un V un E.V et la famille $\mathcal{P} = (v_1, \dots, v_p) \subset V$.

On dit que $\mathcal{P}$ est une base de V lorsqu'elle est libre et génératrice de V ($\text{vect}(\mathcal{P}) = V$, on dit aussi qu'elle engendre V).

Théorème: Soit V un E.V et $\mathcal{P} = (v_1, \dots, v_p) \subset V$

tout vecteur $w \in V$ s'exprime de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{P}$. $w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p$.

$\Leftrightarrow \mathcal{P}$ est une base V . Les coefficients $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ sont appelés coordonnées de w par rapport (dans) à $\mathcal{P}$.

Exp: $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2e_1 + e_2 + 3e_3$.

Admettons que $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base et cherchons les coordonnées de v dans $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_3\}$.

On cherche α, β, γ tels que $v = \alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3$.

$$\begin{cases} \alpha - \gamma = 2 \\ \beta = 1 \\ 2\beta + \gamma = 3 \end{cases}$$

On a tout de suite : $\beta = 1$

$$\alpha + 2 = 3 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

$$\gamma = 1.$$

Les coordonnées de v dans $\mathcal{B}$ sont $(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

Dimension finie: Soit V un E.V. On dit qu'il est de dimension finie lorsqu'il possède une base finie. Sinon on dira qu'il est de dimension infinie.

Exp: $\mathbb{R}_n[X]$ est de dim $n+1$ sur $\mathbb{R}$. Il admet pour base la famille $(X^p)_{0 \leq p \leq n}$
Card $\{(X^p)_{0 \leq p \leq n}\} = n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$.

Revision Algèbre linéaire 6/1.

Dimension infinie: $\mathbb{R}_n[x]$ il admet comme base $(X^p)_{p \in \mathbb{N}}$ (cette famille est infinie).

$\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ avec un nombre fini de termes non nuls.

$\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ admet pour base

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots)$$
$$e_2 = (0, 1, 0, \dots)$$
$$e_3 = (0, 0, 1, \dots)$$

Théorème: Soit V de dimension finie p .

- 1). Toute famille de V qui possède strictement plus de p éléments est liée.
 - 2). Aucun sous-ensemble de $k \leq p$ éléments ne peut engendrer V .
- Toutes les bases de V ont exactement p éléments.

ACT: Déterminer la dimension de $\mathbb{R}^n$, la base standard contient n vecteurs $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \right\}$ n -uplet.

⚠ Attention avec les polynômes $\mathbb{R}_n[x]$ n'est pas de dim n ! Montrer que $(1, X, X^2, X^3, X^4, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

Généralisation: Tout polynôme de degré $\leq n$ peut s'écrire:

$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n \text{ avec } a_0, \dots, a_n \text{ réels.}$$

Libres: $a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n = 0_{\mathbb{R}[X]} \Rightarrow a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$.
(Tous les coeff. sont nuls).

Théorème: Soit V un E.V. de dimension n et S une famille de V de n vecteurs; les affirmations suivantes sont équivalentes:

- 1). S est une base de V
- 2). S engendre V (= est génératrice de V).
- 3). S est libre.

ACT: Soit les polynômes:

$$P_0 = (X-1)(X-2)(X-3)$$

$$P_1 = X(X-2)(X-3)$$

$$P_2 = X(X-1)(X-3)$$

• Rappeler la dimension de $\mathbb{R}_3[X]$.

• Montrer que (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

On suppose $\exists \alpha, \beta, \gamma, \delta$ réels tel que:

$$\alpha P_0(x) + \beta P_1(x) + \gamma P_2(x) + \delta P_3(x) = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

On évalue en 0, 1, 2, 3.

en 0 : $\alpha P_0(0) = 0$ or $P_0(0) \neq 0$ donc $\alpha = 0$.

en 1 : $\beta P_1(1) = 0$ or $P_1(1) \neq 0$ donc $\beta = 0$.

etc.

Exos (seulement) au DE: Montrer que la famille

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.

On résout le système homogène $xv_1 + yv_2 + zv_3 + tv_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x - 2y + t = 0 \\ x + y + t = 0 \\ -x - z - y = 0 \end{cases} \quad \text{la 1 et la 2} \quad y = 0 \quad \begin{cases} x + z = 0 \\ -x + t = 0 \\ x + t = 0 \end{cases}$$

d'où $t = x = z = y = 0$.

Remarque: On vient de montrer que $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \vec{0}$ n'admet que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ comme solution.

Exos: Montrer que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$.

v_1, v_2, v_3 n vecteurs de $\mathbb{R}^3$

(v_1, v_2, v_3) libre si $|(v_1, v_2, v_3)| \neq 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{car } l_3 = -l_1$$

Si non $v_3 = v_1 + v_2$ donc la famille est liée.

Ex: $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ libre dans $\mathbb{R}^n$, montrer que $(v_1, v_2, \dots, v_{p-1})$ est aussi libre.

On sait la liberté de $(v_1, \dots, v_p)$

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{p-1} v_{p-1} + \lambda_p v_p = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0.$$

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{p-1} v_{p-1} + 0 v_p = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \lambda_{p-1} = 0$$

On a montré $(v_1, v_2, \dots, v_{p-1})$ libre.

Ex: Soit $(v_1, \dots, v_p)$ génératrice de $\mathbb{R}^n$ ($p \geq 0$) et w un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $(v_1, \dots, v_p, w)$ est aussi génératrice.

Tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire : $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p$.

Soit $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p + 0 w$ donc $(v_1, \dots, v_p, w)$ est génératrice.

Ex: Soit $A \in \text{clb}_{3,4}$ montrer que l'ensemble $K = \{ B \in \text{clb}_{4,4}(\mathbb{R}) \mid AB = 0 \}$ muni de l'addition entre matrices et de la multiplication par un réel ($\times$ externe) est un espace vectoriel.

$$\text{clb}_{4,4} \in K \quad (0' \in V)$$

On prend B et B' dans K , On montre que $\forall X \in \mathbb{R} : B + XB' \in K$

Il faut montrer que $A(B + XB') = 0$.

$$A \cdot (B + XB') = \underbrace{AB}_{0} + \underbrace{AXB'}_{0} = 0 + 0 = 0$$

La multiplication est distributive

Rang d'une application linéaire:

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application linéaire et A sa matrice standard.

L'image de f (image directe de $\mathbb{R}^n$) est engendrée par les vecteurs colonnes de A .

$$Y \in \text{Im} f \Leftrightarrow \exists X \in \mathbb{R}^n : Y = f(X).$$

Soit $E_1, E_2, \dots, E_n$ la base standard de $\mathbb{R}^n$

$$X = x_1 E_1 + x_2 E_2 + \dots + x_n E_n$$

$$f(X) = f(x_1 E_1 + x_2 E_2 + \dots + x_n E_n) \text{ d'après la linéarité de } f.$$

$$f(X) = x_1 f(E_1) + x_2 f(E_2) + \dots + x_n f(E_n)$$

Les $f(E_1), f(E_2), \dots, f(E_n)$ sont les vecteurs colonnes de A .

$\rightarrow$ L'image de f est engendrée par les vecteurs colonnes de A .

$$\text{Im} f = \text{Vect}(f(E_1), \dots, f(E_n)) \text{ la dimension de } \text{Vect}(f(E_1), \dots, f(E_n))$$

appelé rang de f (ou de A).

$$\text{On note : } \dim \text{Im} f = \text{rg} A = \dim \text{Vect}(f(E_1), \dots, f(E_n)).$$

Théorème du rang: Soit $A \in \text{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ ($f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$)

$$\text{rg} A + \dim \text{Ker} A = n$$

Notation: $\dim \text{Ker} A$ se note $\text{null}(A)$ = la nullité de A .

On peut aussi directement le rg en comptant le nb de 1 directeur depuis la matrice échelonnée réduite. (pivots de GAUSS)

Exo: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ On prend un vecteur dans $\text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ soit

ce vecteur.

$$w = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (\alpha - 2\beta + \gamma) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

théorème du rang: $\text{rg} A + \text{null} A = 4$

$$2 + \text{null} A = 4 \Rightarrow \text{null} A = 2.$$

Vérifions que $\text{null} A = 2$ en résolvant $AX=0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2y - z.$$

$$\text{Les solutions sont } \begin{pmatrix} 2y - z \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

base du noyau.

Revison Algèbre linéaire 7/.

On aurait pu remarquer que le vecteur $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vérifie $Av_1 = 0$ et $Av_2 = 0$. Comme on sait que la dimension nulle $A = 2$ et que v_1 et v_2 sont non colinéaires, (v_1, v_2) est une base des noyaux.

Remarque importante: Si $f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, f injective $\Leftrightarrow$ f bijective.

Si $\text{Ker } A = \vec{0}$, nulle $A = 0$, le théorème du rang donne:

$$\text{rang } A + 0 = n \Leftrightarrow \text{rang } A = n.$$

$$f_A \text{ injective} \Leftrightarrow f_A \text{ bijective} \Leftrightarrow \text{rang } A = n.$$

Exo: Espace Vectoriel de matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1). Calculer B^2 et B^3

2). Déterminer si I, B, B^2, B^3 forment la famille libre.

3). Montrer que Vect $(\underbrace{I, B, B^2, B^3, \dots, B^p, \dots}_F)$ est un espace vectoriel de dimension finie.

4). Vérifier que I, B, B^2 est libre. et que $B^3 = I + 3B + 3B^2$ et

déterminer la dimension de F .

2). Il s'agit $xI + yB + zB^2 + tB^3 = 0$ et voir s'il existe une solution (x, y, z, t) différente de $(0, 0, 0, 0)$.

$$x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_{3 \times 3}.$$

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ y + 2z + 3t = 0 \\ z + 3t = 0 \end{cases}$$

Système homogène 3 équations
4 solutions.

$\rightarrow$ il y a une ∞ de solutions.

Donc $\{I, B, B^2, B^3\}$ est liée.

3). $\alpha_1 B^1 + \alpha_2 B^2 + \alpha_3 B^3 \in \text{db}_{2,3}(\mathbb{R})$.

4). En reprenant la question 2 $\begin{cases} x+y+z=0 \\ y+z=0 \\ z=0 \end{cases}$
 Le système est de donner $x=y=z=0$.

Pour montrer que (I, B, B^2) engendre F

On veut montrer $\forall k \in \mathbb{N}, B^k = \alpha I + \beta B + \gamma B^2$.

On admet que $B^3 = I - 3B + 3B^2$.

On fait l'hérédité:

Au rang 1: $B^1 = 0I + 1B + 0B^2$

Hérédité: $B^k \cdot B = \alpha B + \beta B^2 + \gamma B^3$

$B^{k+1} = \alpha B + \beta B^2 + \gamma (I - 3B + 3B^2)$

B^{k+1} est bien une C.L. de I, B, B^2

I, B, B^2 est libre et génératrice de F C'est une base de F , on en déduit $F=3$.

Admettons les résultats suivants:

- La somme de 2 matrices triangulaires sup. est triangulaire sup.

- Le produit de 2 triangulaires sup. est triangulaire sup.

Si on note T_3^+ le sous-espace des triangulaires sup. Montrer

que $F \subset T_3^+$ $\begin{pmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

Comme T_3^+ est stable par produit, $\forall k \in \mathbb{N}, B^k \in T_3^+$

Comme T_3^+ est stable par somme, $\alpha B^k + \beta B^q \in T_3^+$

donc $F \subset T_3^+$.

Déterminer le rang de 3 Vecteurs grâce au Pivot de GAUSS,

Ex:

Quel est le rang de $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

On forme la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

idea: mettere la matrice sotto forma $\begin{pmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & x & x \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ -3 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{3R_1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

Exo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\text{Ker } A = 1$

d'après le théorème du rang $\text{rg} A = 4 - 1 = 3$

InfA est engendré par (v_1, v_2, v_3, v_4) , il faut donc 3 vecteurs qui forment une famille libre.

On p. 200, 201, 202

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{I}_4 + \text{I}_3$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $r_3 - r_2$

Remarque: $\text{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \text{Inf} n$.

Changement de base :

Rappel: Soit V un espace vectoriel de dimension n et une base B .

$B = (v_1, \dots, v_n)$, $v \in V$ s'écrit de manière unique

$$v = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_p \alpha_p$$

Les $x_1, x_2, \dots, x_p$ s'appellent les coordonnées dans B on

notera $(v)_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ \vdots \\ 2 \end{pmatrix}$

Matrice de passage :

Soit V un espace vectoriel de dim n et de base $B = (v_1, \dots, v_n)$ (l'ancienne base) et $B' = (v'_1, \dots, v'_n)$ (la nouvelle base)

On désigne par $((P_1^{B'})_B, (P_2^{B'})_B, \dots, (P_n^{B'})_B) = P_{BB'}$ la matrice

de passage de B à B' .

Théorème: Formule de changement de base.

Avec les notations précédentes :

$$\forall v \in V, (v)_{B'} = P_{BB'} (v)_B \quad \Delta \text{ Attention à l'ordre.}$$

Cette formule donne les coordonnées dans l'ancienne base en fonction de la nouvelle.

Exemple: Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$

B' la famille $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B.$

1) Montrons que B' est une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ p.e.h.} \quad \text{On en déduit } \text{rg}(v_1, v_2, v_3) = 3$$

D'après la définition $P_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

À l'ordre des Vecteurs compte.

Si on considère $B'' = (v_2, v_1, v_3)$

$$P_{BB''} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

formule de changement de Base :

$$(v)_B = P_{BB'} (v)_{B'} \Leftrightarrow P_{BB'}^{-1} (v)_B = (v)_{B'}$$

Soit $(v)_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$
Coordonnées dans B' ?

Il faut inverser $P_{BB'}$: $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (v)_{B'} = P_{BB'}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

On aurait pu résoudre $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Remarque: Soit $B = (v_1, \dots, v_n)$ et $B' = (v'_1, \dots, v'_n)$
2 bases de $\mathbb{R}^n$ $P_{BB'} P_{B'B} = I_n.$

Revision Algèbre linéaire 81.

Exo: On a vu en cours que la division que $\mathbb{R}_3[X]$ est un e.v de dimension 4.

On a vu aussi que $P_0 = (X-1)(X-2)(X-3)$

$$P_1 = X(X-2)(X-3)$$

$$P_2 = X(X-1)(X-3)$$

$$P_3 = X(X-1)(X-2) \quad \text{forment une base de } \mathbb{R}_3[X].$$

1). Montre que $Q_0 = 1/6 P_0$, $Q_1 = 1/2 P_1$, $Q_2 = 1/2 P_2$

$Q_3 = 1/6 P_3$ est aussi une base.

2). En déduire la matrice de Passage $P_{B \rightarrow B'}$. $B' = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$.

$$1). \quad \alpha Q_0(X) + \beta Q_1(X) + \gamma Q_2(X) + \delta Q_3(X) = 0_{\mathbb{R}[X]}.$$

On évalue en 0 $\alpha Q_0(0) = 0$ or $Q_0(0) \neq 0$ donc $\alpha = 0$.

$$\text{en 1:} \quad \beta Q_1(1) = 0 \quad \text{or } Q_1(1) \neq 0 \text{ donc } \beta = 0.$$

$$\text{en 2:} \quad \gamma Q_2(2) = 0 \quad \text{or } Q_2(2) \neq 0 \text{ donc } \gamma = 0.$$

$$\text{en 3:} \quad \delta Q_3(3) = 0 \quad \text{or } Q_3(3) \neq 0 \text{ donc } \delta = 0.$$

$$2). \quad B' = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) \quad B = (1, X, X^2, X^3).$$

$$Q_0(X) = \frac{1}{6}(X^2 - 2X - X + 3)(X-3).$$

$$= (X^3 - 3X^2 - 2X^2 + 6X - X^2 + 3X + 3X - 9) \frac{1}{6}.$$

$$= 1 - \frac{11}{6}X + X^2 - \frac{1}{6}X^3$$

etc...

$$\begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/6 & 3 & -3/2 & 1/3 \\ 1 & -5/2 & 2 & -1/2 \\ -1/6 & 1/2 & -1/2 & 1/6 \end{pmatrix}$$

Exo Montrez que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en donner une base et la dimension.

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 0 \}.$$

$$B = \{ P \in \mathbb{R}[X], \deg P \leq 4 \}.$$

$$C = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0 \}.$$

- 1). Montrez que A : est un SEV de $\mathbb{R}^2$
- 2). Montrez que B : est un SEV de $\mathbb{R}[X]$.
- 3). Montrez que C : est un SEV de $\mathbb{R}^3$.

→ Il y a deux choses à faire :

- Vérifier que le vecteur nul appartient à l'ensemble.
- Vérifier que si $u \in E$ et $v \in E$ alors pour tout α et β dans $\mathbb{R}$, $\alpha u + \beta v \in E$.

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 0 \}.$$

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ vérifie } x + y = 0.$$

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \text{ montrez } \alpha u + \beta v \in A.$$

$$\alpha u + \beta v = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta x' \\ \alpha y + \beta y' \end{pmatrix}$$

$$\alpha u + \beta v \in A \Leftrightarrow \alpha x + \beta x' + \alpha y + \beta y' = 0.$$

$$\Leftrightarrow \alpha(x + y) + \beta(x' + y') = 0.$$

$$\text{Or } y + x = 0 \text{ et } x' + y' = 0.$$

$$\text{Donc } \alpha u + \beta v \in A.$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x + y = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -y \end{cases} \quad \text{les vecteurs solutions sont de la forme :}$$

$$\begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$A = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est une base de } A, \dim A = 1.$$

$$C = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0 \}.$$

On peut considérer le système 1 équation 3 inconnues.

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \end{cases} \quad \text{la matrice } (1 \ -1 \ 1)$$

$\begin{cases} x - y + z = 0 \end{cases}$ donc les solutions du système homogène sont les vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$

$$= y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$C = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ donc dim } C = 2.$$

$$B = \{ P \in \mathbb{R}[X], \deg \leq 4 \}.$$

Montrons que B est un espace vectoriel (que c'est un SEU de $\mathbb{R}(X)$)
 $\deg 0_{\mathbb{R}[X]} = -\infty < 4.$

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$$

$$Q = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + b_3 X^3$$

Quel est le coef de X^4 de $\alpha P + \beta Q$?

Le terme de plus haut degré éventuellement non nul est $(\alpha a_3 + \beta b_3) X^4$ qui est de degré ≤ 3 donc $\deg(\alpha P + \beta Q) \leq 3$ ou ≤ 4 .

On a vu on conclut que dim $B = 4$ une base de B est $B = \{1, X, X^2, X^3\}$ // base la plus simple.

Ex. Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degrés $\leq n$.

On considère $f_1 = x^2 + x - 1$, $f_2 = 2x$, $f_3 = x^2 + 1$.

$\rightarrow$ Montrons que la famille est libre.

$$\text{liberté de } (f_1, f_2, f_3) : \alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

$$\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = \alpha(x^2 + x - 1) + \beta(2x) + \gamma(x^2 + 1).$$

$$\Rightarrow (\alpha x^2 + \gamma x^2) + (\alpha x + \beta 2x) + (-\alpha + \gamma).$$

$$\Rightarrow (\alpha + \gamma)x^2 + (\alpha + 2\beta)x - (\alpha - \gamma).$$

Comme $\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = 0_{\mathbb{R}[x]}$ $\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \\ -\alpha + \gamma = 0 \end{cases}$

$f_1 + f_3 = 0 \Rightarrow 2\gamma = 0$

Si $\gamma = 0$, $f_1 \Rightarrow \alpha = 0$ et $f_2 \Rightarrow \beta = 0$.

(f_1, f_2, f_3) est une famille libre de 3 vecteurs dans un E.V de dimension 3, c'est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

Exo: On considère l'application $f: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$
 $P \mapsto 2(x+1)P - (x^2 - 2x + 1)P$

- Soit $P = ax^2 + bx + c$, calculer les coefficients $f(P)$.
- En déduire la matrice de f dans la base standard de $\mathbb{R}_2[x]$.

$f(P) = (6a+b)x^2 + (-2a+4b+2c)x + (-b+2c)$.

Base standard $\{1, x, x^2\}$.

Il suffit de donner les bonnes valeurs de a, b, c pour avoir $f(1), f(x), f(x^2)$.

1: $a=0, b=0, c=1$

x : $a=0, b=1, c=0$.

x^2 : $a=1, b=0, c=0$.

$f(1) = 2x+2$

$f(x) = x^2 + 4x - 1$

$f(x^2) = 6x^2 - 2x$

$M = \begin{pmatrix} f(1) & f(x) & f(x^2) \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{matrix}$

Exo: Soit $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e_n\}$ une base d'un e.v. E , montrer que la famille $\{e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3, \dots, e_1+e_2+\dots+e_n\}$ est libre et donc une base de E .

liberté: $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 (e_1+e_2) + \lambda_3 (e_1+e_2+e_3) + \dots + \lambda_n (e_1+e_2+\dots+e_n)$
 $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

$= (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) e_1 + (\lambda_2 + \dots + \lambda_n) e_2 + \dots + (\lambda_{n-1} + \lambda_n) e_{n-1} + \lambda_n e_n$
 mais $(e_1, \dots, e_n)$ est libre donc le système

Revision Algèbre Linéaire 9/1

homogène en $\lambda_1 \dots \lambda_n$. Il n'y a que des 1 sur la diagonale.
 $\det A = 1$.

Exo: Matrice magique $\Rightarrow$ Somme d'une ligne = somme d'une colonne = somme de la 1^{ère} diag = somme de la 2^{ème}.

1) Montrez que la transposée d'une matrice magique est une matrice Mag.
 $\rightarrow$ Qd on transpose une matrice, les lignes deviennent les colonnes et les colonnes deviennent les lignes. Donc la transposée d'une matrice magique est magique.

2) $M_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

$\rightarrow 0 \in M_n(\mathbb{R}) \in M_n$ (évident)

$\rightarrow$ Si M_1 et M_2 sont magiques alors $\alpha M_1 + \beta M_2 \in M_n$.

Stable par combinaison linéaire.

$\hookrightarrow$ le nombre magique de M_1 est αn
le nombre magique de M_2 est βn

Que vaut la somme des lignes $\alpha M_1 + \beta M_2$?

Que vaut la somme des colonnes $\alpha M_1 + \beta M_2$?

Donc le nombre magique de αM_1 est αn
et de βM_2 est βn .

Donc le nombre magique $\alpha M_1 + \beta M_2 = \alpha n + \beta n$.

3) MQ Si $M \in M_n$, alors M' et M'' sont $\in M_n$.

$\rightarrow$ Comme $M' \in M_n$ $\Rightarrow M' \in M_n$.

nb mag : $\alpha M_1 + \beta M_2$ est $\alpha n + \beta n$.

donc si $\alpha M_1 + \beta M_2$ alors $\alpha n + \beta n$.

M' et M'' sont magiques par combinaison linéaire de M_1 et M_2 .

4). Montrer que l'ensemble des matrices magiques et antisymétriques forment un E.V de dimension 2 dont on donnera une base.

→ Une matrice antisymétrique a toutes ses diagonales = 0 et ses coeff sont opposés suivant la diagonale.

$$\begin{pmatrix} 0 & x & y \\ x & 0 & z \\ y & z & 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(m_1, m_2, m_3) est libre et génératrice de l'ensemble des matrices 3x3 antisymétriques.

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = y \\ x = z \\ z = -y \end{cases} \quad S = \{(-y, y, -y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & y & -y \\ -y & 0 & y \\ y & -y & 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

4). Montrer que les matrices : magiques et symétriques de trace nulle forment aussi un E.V de dim 2 dont on donnera une base

$$M = \begin{pmatrix} a & c & d \\ c & b & e \\ d & e & a-b \end{pmatrix} \quad \text{et écrire qu'elle est magique}$$

$$\begin{cases} a+c=0 \\ a+e=0 \\ c=a \\ b=d=0 \end{cases} \Rightarrow S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (a; 0; -a; 0; a)$$

5) D'après la question précédente qu'une matrice magique symétrique et de trace 1 est la somme d'un multiple de S

et d'un multiple de $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

→ M est magique, symétrique mais pas de trace nulle

M est la trace t donc $M = \frac{t}{3} C$.

$$M = M - \frac{t}{3} C + \frac{t}{3} C = KS + \frac{t}{3} C.$$

6). En déduire une base de clbag et sa dimension.

$$cb = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

• On considère $M \in \text{clbag}$ quelconque. Elle se décompose en $M = M' + M''$

$$M = x \text{cb} + y S + z C$$

$$\begin{cases} z=0 \\ y+z=0 \\ x=z. \end{cases} \quad \text{d'où} \quad x = y = z = 0.$$