

Questions de cours :

Enoncer les lois de De Morgan relatives à 2 assertions A et B.

Enoncer les formules d'Euler et la formule de Moivre.

Quelles sont les racines de $x^3 = 1$?

Définir une application et une bijection d'un ensemble E dans un ensemble F.

Enoncer et définir les propriétés d'une relation d'ordre dans un ensemble E.

Enoncer la formule du binôme de Newton.

Définir la congruence modulo m de 2 entiers.

Quelle est la somme d'une progression géométrique ? d'une progression arithmétique ?

Enoncer les deux formes du théorème de Bezout.

Enoncer le théorème de Gauss relatif à la divisibilité.

Quel est le nombre d'injections d'un ensemble E dans un ensemble F ?

Combien y a-t-il de sous-ensembles dans un ensemble de n éléments ?

Enoncer la formule des « 4 cardinaux ».

Définir la division euclidienne de deux entiers naturels.

Quel est le reste de la division du polynôme $P(x)$ par $(x-a)$?

Définir la multiplicité d'ordre k d'une racine a d'un polynôme $P(x)$.

Exercice n°1

Soit l'énoncé E : $\forall a \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : \ln(x) = a$. Ecrire sa négation. Quel est l'énoncé exact : E ou sa négation ?

Exercice n°2

Soit l'équation $z^2 + (1+2i)z - 3+11i = 0$? Quelles sont, en représentation algébrique, les racines de cette équation, leur produit, leur somme et la somme de leurs inverses ? (indication $\sqrt{1681} = 41$).

Exercice n°3

On considère des polynômes en X à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Les coefficients de ces polynômes appartiennent donc au corps $\mathbb{F}_2$ fini à 2 éléments 0 et 1, muni des lois d'addition modulo 2 et de multiplication.

Effectuer l'addition et la multiplication des polynômes $P = X^6 + X^4 + X^3 + X$ et $Q = X^4 + X$.

Quel est le PGCD de ces deux polynômes ? Déterminer deux polynômes U et V tels que $P.U + Q.V$ soit égal à ce PGCD.

Exercice n°4

On considère la relation ρ définie dans l'ensemble des parties de E par :

$A \rho B$ si et seulement si $(A = B \text{ ou } A = \bar{B})$ où $\bar{B}$ est le complémentaire de B dans E.

Montrer que ρ est une relation d'équivalence.

Exercice n°5

On effectue un lancer de 3 dés, chacun ayant 9 faces comportant un nombre de 1 à 9. Le résultat d'un lancer est formé des 3 nombres obtenus classés par ordre croissant. Combien y a-t-il de résultats différents ? Combien y a-t-il de résultats formés de 3 nombres strictement croissants ? Combien y a-t-il de résultats formés de 3 nombres tous différents ? Combien y a-t-il de résultats comprenant deux (et deux seulement) nombres identiques ? Combien y a-t-il de résultats formés de 3 nombres dont 2 d'entre eux ne sont jamais égaux ni consécutifs ?

Exercice n°6

-Soit $a = 2015$ et $b = 2011$. Trouver deux entiers relatifs u et v tels que $a.u + b.v = \text{pgcd}(a,b)$. Quel est le reste de la division par 9 de b^a ?

-Quelle est la factorisation première du nombre 5457375 ? Combien ce nombre a-t-il de diviseurs ?

-Quels sont tous les entiers relatifs x et y tels que $26x + 15y = 4$?