

Contrôle Ecrit **Corrigé succinct**

1 point de plus pour le premier étudiant signalant une erreur mathématique dans le corrigé !!!

Questions de cours

Voir notes prises en cours

Exercice 1 :

On considère, pour x réel, les 4 assertions A , B , C et D avec

$$A : 0 < x \leq 1 \quad ; \quad B : x^2 \leq x \quad ; \quad C : |x| \leq 1 \quad ; \quad D : \frac{1}{x} > 1$$

On considère les intervalles dans lesquels ces assertions sont vraies, soit $IA =]0 ; 1]$, $IB = [0 ; 1]$, $IC = [-1 ; 1]$ et $ID =]0 ; 1[$ respectivement. Une première assertion implique une deuxième si l'intervalle correspondant de la première est inclus dans l'intervalle correspondant de la deuxième. On obtient donc :

$$A \Rightarrow B ; A \Rightarrow C ; B \Rightarrow C ; D \Rightarrow A ; D \Rightarrow B ; D \Rightarrow C$$

Exercice 2 :

On considère l'assertion $A : \forall X \in \mathbb{R}, (X^3 = 2) \Rightarrow (1 < X \leq 2)$

Ecrire l'assertion $\bar{A}$. Laquelle de ces deux assertions est exacte ?

$$\bar{A} : \exists X \in \mathbb{R} : \text{non}((X^3 = 2) \Rightarrow (1 < X \leq 2)), \text{ soit}$$

$$\bar{A} : \exists X \in \mathbb{R} : (X^3 = 2) \text{ ET } \text{non}((1 < X \leq 2)), \text{ soit}$$

$$\bar{A} : \exists X \in \mathbb{R} : (X^3 = 2) \text{ ET } (X \leq 1 \text{ OU } X > 2)$$

Comme $X^3 = 2$ a pour seule racine réelle $X = 1.26$ environ, c'est l'assertion A qui est Vraie.

Exercice 3 :

La Grèce doit encore 89 milliards ; pour éviter sa faillite, l'Allemagne, la France et l'Italie décident de garantir une partie de cette dette : l'Allemagne en garantit 45, l'Italie en garantit 24. En commun, 13 milliards sont garantis par la France et l'Italie, 12 par l'Allemagne et l'Italie, et 11 par la France et l'Allemagne ; parmi ces dettes, 3 milliards sont garantis à la fois par l'Allemagne, l'Italie et la France. La Grèce fait cependant faillite car il lui reste 17 milliards non garantis. Combien la France avait-elle garanti en tout ?

La dette garantie est de $89 - 17 = 72$ milliards. Soit A , F et I les montants garantis par l'Allemagne, la France et l'Italie respectivement.

$$\text{On a } 72 = \text{card}(A \cup F \cup I) = \text{card}(A) + \text{card}(F) + \text{card}(I) - \text{card}(A \cap F) - \text{card}(F \cap I) - \text{card}(I \cap A) + \text{card}(A \cap F \cap I).$$

$$\text{Soit } 72 = 45 + \text{card}(F) + 24 - 11 - 13 - 12 + 3$$

$$\text{D'où } \text{card}(F) = 36$$

Exercice n°4 :

Ecrire la négation de l'énoncé : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } |x_2 - x_1| < \alpha \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$.

Que signifie cet énoncé pour une fonction f de la variable réelle x ?

La négation est :

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \alpha > 0, |x_2 - x_1| < \alpha \text{ et } |f(x_2) - f(x_1)| \geq \varepsilon.$$

L'énoncé signifie que f est une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}$.