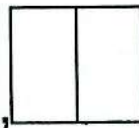
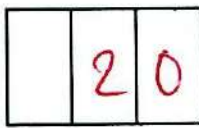


20

COMBETTE
ElianePIL
2013jeudi 24 AvrilEE Nombres et Structures

- la négation de " $\forall x \in E, \forall y \in E, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ " est " $\exists x \in E, \exists y \in E, f(x) = f(y)$ ET $x \neq y$ ". 3
- la négation de " $\exists x \in E, 1 \leq x \leq 3$ " est " $\forall x \in E, x \leq 1$ ou $x > 3$ ". 3
- la contraposée de " n est premier $\Rightarrow n$ est multiple de 3" est " n n'est pas multiple de 3 $\Rightarrow n$ n'est pas premier". 3
- On cherche l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}\}$ avec $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1], f(x) = \cos \pi x$.
On sait que $\cos X = \frac{1}{2} \Leftrightarrow X = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $X = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, donc
 $x = \frac{1}{3} + dk$ ou $x = \frac{5}{3} + dk$.
 $A = \{(\frac{1}{3} + dk, \frac{5}{3} + dk), k \in \mathbb{Z}\}$ } pourquoi un ensemble de couples ? l'ordre ne compte pas.
- On cherche les différentes classes d'équivalence $\bar{x}$ en fonction de la valeur de $x \in \mathbb{R}$, pour la relation d'équivalence R telle que $x = y$ ou $xy > 0$. Cela signifie donc que x et y sont de même signe. On a donc :
 - * pour $x \in]-\infty; 0[$, $\bar{x} \in]-\infty; 0[$
 - * pour $x \in]0; +\infty[$, $\bar{x} \in]0; +\infty[$
 - * pour $x = 0$, $\bar{x} = \{0\}$
- On veut effectuer la division euclidienne de $x^2 - 1$ par $-2x - 1$.

$$\begin{array}{r|l}
 x^2 - 1 & -2x - 1 \\
 -x^2 + \frac{1}{2}x & -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \\
 \hline
 -\frac{1}{2}x - 1 & \\
 -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} & \\
 \hline
 -\frac{3}{4} &
 \end{array}$$

$$\text{Donc } x^2 - 1 = (-2x - 1)\left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) - \frac{3}{4}$$

3

1,5

7. On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^3 = -1$. Or $-1 = e^{i\pi}$ donc on cherche

$$z \text{ tel que } z^3 = (|z|e^{i\theta})^3 = -1 = e^{i\pi}$$

$$\begin{cases} |z|^3 = +1 \\ 3\theta \equiv \pi \pmod{2\pi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z| = +1 \\ \theta = \frac{\pi}{3} \pmod{\frac{2\pi}{3}} \end{cases}$$

attention! les formes algébriques sont fausses.

$$\text{Donc } x = e^{i\pi/3} \text{ ou } x = e^{i\pi} \text{ ou } x = e^{i5\pi/3}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{ccc} \overline{z} & -1 & z \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ z = e^{-i\pi/3} & e^{i\pi} & e^{i5\pi/3} \\ = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & -1 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{array}
 \end{aligned}$$

8. On veut factoriser $P = x^3 + 1$ à partir des résultats de la question précédente. On cherche les racines du polynôme, c'est-à-dire les x tels que $P(x) = 0$. d'après la question précédente, $e^{i\pi/3}$, $e^{i\pi}$ et $e^{i5\pi/3}$ sont des racines de P . On peut donc en conclure.

$$\begin{aligned}
 P(x) &= (x - e^{i\pi/3})(x - e^{i\pi})(x - e^{i5\pi/3}) = (x - \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3})(x - \cos \pi - i \sin \pi)(x - \cos \frac{5\pi}{3} - i \sin \frac{5\pi}{3}) \\
 &= (x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)(x + 1)(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) \\
 &= (x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)(x + 1)(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)
 \end{aligned}$$

3

$$(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)(x + 1)(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$$

ya plus n'ple
f cam'ye'

