

1
 2 1 1
 3 1 2 1
 4 1 3 3 1

120
 29

 149

130
 39

Sujet 2

- linéariser $\cos^4(x)$
- extraire les racines carrées de $-5 - 12i$
- mettre $\sqrt{3} - 3i$ sous forme $\rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$

Leo
Lellouche
L2 gA

Intervu de nombres et structures

12

Sujet 2:

Exercice B:

On cherche x et y tel que $x + iy = \sqrt{-5 - 12i}$
On calcul le module de $-5 - 12i$:

$$\begin{aligned} |-5 - 12i| &= \sqrt{25 + 144} \\ &= \sqrt{169} \\ &= 13 \end{aligned}$$

Je cherche ensuite à résoudre le système

$$x + y = 13$$

$$x - y = \operatorname{Re}(-5 - 12i)$$

$$\text{Où } x = x^2 \text{ et } y = y^2$$

Donc par combinaison linéaire :

$$2x = -5 + 13 \quad (\Rightarrow) \quad x = 4$$

$$2y = 13 + 5 \quad (\Rightarrow) \quad y = 9$$

On obtient donc 4 solutions :

$$x = \pm\sqrt{9} \quad \text{et} \quad y = \pm\sqrt{4}$$

Pour trouver les bonnes racines on sait que

$$\text{signe}(xy) = \text{signe}(\text{Im}(-5-12i))$$

$$\text{Donc } xy < 0$$

Il y a donc 2 racines solutions de $\sqrt{-5-12i}$:

$$\hookrightarrow \boxed{z_1 = 3 - 2i} \quad \text{et} \quad \boxed{z_2 = -3 + 2i}$$

exercice C :

On cherche $|\sqrt{3} - 3i|$:

$$\begin{aligned} |\sqrt{3} - 3i| &= \sqrt{3+9} \\ &= \sqrt{12} \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } P = 2\sqrt{3}}$$

Pour déterminer θ , z passe en forme polaire :

$$\sqrt{3} - 3i = 2\sqrt{3} (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\text{Donc } \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\boxed{\text{Donc } \theta = \frac{5\pi}{3}}$$

Leo
Lellouche
L2 gA

Exercice C suite:

$$\text{Donc : } \sqrt{3} - 3i = \boxed{2\sqrt{3} e^{i\frac{5\pi}{3}}}$$

Exercice A:

$$\text{On sait que } \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\text{Donc } (\cos x)^4 = \frac{1}{2^4} (e^{ix} + e^{-ix})^4$$

$$\text{Donc } (\cos x)^4 = \frac{1}{16} (e^{4ix} + 3e^{2ix-ix} + 3e^{ix-2ix} + e^{-4ix})$$

$$= \frac{1}{16} (e^{4ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-4ix})$$

$$= \frac{1}{16} (e^{4ix} + e^{-4ix} + 3(e^{ix} + e^{-ix}))$$

$$= \frac{1}{16} (e^{4ix} + e^{-4ix} + 6 \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2})$$

$$= \frac{1}{16} (e^{4ix} + e^{-4ix} + 6 \cos x)$$

1

$$\text{Donc } \boxed{\cos^4 x = \frac{1}{16} (e^{4ix} + e^{-4ix} + 6 \cos x)}$$