

INSA Toulouse
Département STPI
1ère année
UV2 de mathématiques
2009-2010

Mathématiques et Raisonnement

Adeline Rouchon
Violaine Roussier-Michon
David Sanchez
Sandrine Scott

Département GMM (Génie Mathématique et Modélisation)
Adresses email et bureaux :
rouchon@insa-toulouse.fr, bureau 119
roussier@insa-toulouse.fr, bureau 113
david.sanchez@insa-toulouse.fr, bureau 118
scott@insa-toulouse.fr, bureau 118

Table des matières

1	Rappels et notations	7
1.1	Lettres grecques	7
1.2	Ensembles connus	8
1.3	Valeur absolue et Inégalités dans $\mathbb{R}$	8
1.4	Sommes et Produits	10
1.5	Factoriels et Puissances	10
2	Introduction	13
3	Opérations sur les assertions	15
3.1	Négation	15
3.2	Equivalence	15
3.3	Conjonction et disjonction	16
3.4	Implication	19
4	Raisonnement	25
4.1	Définitions	25
4.1.1	Convention	25
4.1.2	Prédicats	25
4.1.3	Quantificateurs	26
4.1.4	Règles d'utilisation	26
4.2	Méthodes de raisonnement	28
4.2.1	Le contre-exemple	28
4.2.2	Raisonnement par l'absurde	28
4.2.3	Raisonnement par récurrence	28
4.2.4	Raisonnement par analyse-synthèse	30
5	Ensembles	33
5.1	Inclusion, Egalité	33
5.2	Opération sur les parties de E	34
5.2.1	Complémentaire	34
5.2.2	Ensemble vide	35
5.2.3	Ensemble des parties de E	35
5.3	Intersection, Union	35
5.4	Produit cartésien	37

5.5	Famille d'éléments et partition d'un ensemble	38
6	Relations binaires	41
6.1	Définitions	41
6.2	Propriétés	41
6.3	Relations d'équivalence	42
6.3.1	Définition	42
6.3.2	Classe d'équivalence	42
6.3.3	Ensemble quotient	43
6.4	Relation d'ordre	44
6.4.1	Définitions	44
6.4.2	Plus petit élément - Plus grand élément	45
6.4.3	Minorant - Majorant	46
6.4.4	Borne inférieure - Borne supérieure	46
6.5	Propriétés de l'ensemble des réels	47
7	Fonctions-Applications	51
7.1	Généralités	51
7.1.1	Restriction et prolongement d'une application	52
7.1.2	Image directe, image réciproque d'un sous-ensemble	53
7.1.3	Composition	54
7.2	Injection, surjection, bijection	55
7.2.1	Définitions	55
7.2.2	Propriétés	56
8	Ensembles finis - Dénombrement	61
8.1	Ensembles finis, dénombrables, infinis non dénombrables	61
8.1.1	Définitions	61
8.1.2	Cardinaux, union, intersection et produit	63
8.1.3	Cardinaux et application	66
8.2	Dénombrement	67
8.2.1	Cardinaux et parties	67
8.2.2	Arrangements	68
8.2.3	Combinaisons	70
9	Suites numériques réelles	73
9.1	Définitions, Opérations	73
9.1.1	Définitions	73
9.1.2	Opérations	74
9.2	Convergence, divergence	77
9.2.1	Définitions des suites convergentes	77
9.2.2	Conséquences immédiates de la convergence	77
9.2.3	Suites divergentes	79
9.2.4	Théorèmes d'encadrement	80
9.3	Opérations sur les limites	82
9.3.1	Addition	82

9.3.2	Produit	82
9.3.3	Formes indéterminées	84
9.4	Suites monotones	85
9.4.1	Définitions et propriétés	85
9.4.2	Suites adjacentes	87
9.4.3	Applications	88
9.5	Suites récurrentes	90
9.5.1	Définitions, exemples	90
9.5.2	Convergence	90
10	Annales	95
10.1	Partiel	95
10.2	Examen	96
10.3	Examen	98
10.4	Devoir	99
10.5	Devoir	100

Chapitre 1

Rappels et notations

1.1 Lettres grecques

L'alphabet grec est d'usage courant en mathématiques, souvent pour permettre de différencier le rôle des différentes variables qui apparaissent dans un problème (un paramètre d'une variable, un nombre d'un vecteur...). Le voici en majuscules et minuscules :

Nom	Minuscule	Majuscule
alpha	α	A
beta	β	B
gamma	γ	Γ
delta	δ	Δ
epsilon	ϵ, ε	E
dzeta	ζ	Z
eta	η	H
theta	θ	Θ
iota	ι	I
kappa	κ	K
lambda	λ	Λ
mu	μ	M
nu	ν	N
xsi	ξ	Ξ
omicron	o	O
pi	π	Π
rho	ρ	P
sigma	σ, ς	Σ
tau	τ	T
upsilon	υ	U
phi	ϕ, φ	Φ
chi (ki)	χ	X
psi	ψ	Ψ
omega	ω	Ω

1.2 Ensembles connus

On rappelle que

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ est l'ensemble des nombres entiers naturels (positifs ou nuls),
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ est l'ensemble des nombres entiers relatifs (de signe quelconque),
- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels, c'est-à-dire l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ où p et q sont des nombres entiers relatifs, q non nul,
- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels,
- $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes, c'est-à-dire l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $a + ib$ où a et b sont des réels et $i^2 = -1$.

Nous verrons dans ce cours la construction d'une partie de ces ensembles en admettant la construction d'autres. Notons tout de même la liste d'inclusions :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$ sont souvent utilisés :

- $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$ est l'ensemble des nombres réels positifs,
- $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R}, x \leq 0\}$ est l'ensemble des nombres réels négatifs,
- $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$ est l'ensemble des nombres réels non nuls,
- $\mathbb{R}^{+*} = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$ est l'ensemble des nombres réels strictement positifs,

On peut définir de même les nombres réels strictement négatifs, les nombres rationnels positifs etc...

On utilise aussi les intervalles de $\mathbb{R}$ qui peuvent être de formes variées. Soient a et b deux nombres réels tels que $a \leq b$,

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$ est l'intervalle fermé borné (ou segment) d'extrémités a et b . Si $a = b$, cet intervalle est réduit à un point.
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x\}$ est l'intervalle fermé à gauche d'extrémité a et non borné (ou demi-droite fermée à gauche).
- $] -\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq a\}$ est l'intervalle fermé à droite d'extrémité a et non borné (ou demi-droite fermée à droite).

Si $a < b$, on a aussi

- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$ est l'intervalle ouvert borné d'extrémités a et b .
- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a < x\}$ est l'intervalle ouvert à gauche d'extrémité a et non borné (ou demi-droite ouverte à gauche).
- $] -\infty, a[= \{x \in \mathbb{R}, x < a\}$ est l'intervalle ouvert à droite d'extrémité a et non borné (ou demi-droite ouverte à droite).

1.3 Valeur absolue et Inégalités dans $\mathbb{R}$

Définition 1.1. La valeur absolue se définit par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Ceci peut se résumer de la façon suivante :

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

L'égalité suivante se traduit par

$$|x| = |y| \Leftrightarrow x = y \text{ OU } x = -y$$

L'inéquation suivante se traduit par

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \Leftrightarrow x \geq -a \text{ ET } x \leq a$$

Proposition 1.2. Soient $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ quatre nombres réels.

1. Si $xy \neq 0$ alors xy et $\frac{x}{y}$ sont de signe : positif si x et y sont de même signe, négatif si x et y sont de signes contraires.
2. Si $x \leq t$ et $y \leq z$ alors $x + y \leq t + z$. (faux pour la soustraction !!)
3. Si $0 \leq x \leq t$ et $0 \leq y \leq z$ alors $xy \leq tz$. (faux en général si les nombres ne sont pas tous positifs)
4. Si $0 < x < y$ alors $\frac{1}{x} > \frac{1}{y} > 0$, $0 < x^2 < y^2$ et $0 < \sqrt{x} < \sqrt{y}$. (faux en général si les nombres ne sont pas tous positifs)
5. Si $x > 1$ alors $1 < \sqrt{x} < x < x^2 < x^3 < \dots$.
6. Si $0 < x < 1$ alors $0 < \dots < x^3 < x^2 < x < \sqrt{x} < 1$.

Proposition 1.3. (Inégalité triangulaire)

Pour tout couple de réels $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

et plus généralement

$$||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$$

Proposition 1.4. Pour tout couple de réels $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$$

Démonstration Tout carré d'un nombre réel est positif. En particulier, pour tout couple de réels $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

Ainsi, $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$. ◇

Remarque 1.5. Une généralisation de cette inégalité appelée inégalité de Young existe : Pour tout couple de réels $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et tous réels strictement positifs p et q tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Elle s'obtient en utilisant la concavité de la fonction logarithme.

1.4 Sommes et Produits

Définition 1.6. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit f une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\sum_{k=0}^n f(k) = f(0) + f(1) + \cdots + f(n-1) + f(n)$$

Ce résultat ne dépend **jamaïs** de k .

Exemple 1.7. L'indice k est un indice de sommation "muet". On peut lui donner le nom que l'on veut.

$$\sum_{k=0}^n k = \sum_{l=0}^n l = \sum_{prof=0}^n prof = \frac{n(n+1)}{2}$$

Proposition 1.8. Si ϕ est une bijection de $\{m_0, \dots, m_n\}$ dans $\{0, \dots, n\}$, on peut effectuer un changement d'indices selon la règle suivante

$$\sum_{k=0}^n f(k) = \sum_{l=m_0}^{m_n} f \circ \phi(l)$$

Ce résultat ne dépend ni de k ni de l .

Cette propriété est l'équivalent discret (c'est-à-dire sur des indices entiers) du changement de variables que vous connaissez sur les intégrales (dit continu).

Exemple 1.9. $\sum_{k=0}^n k^2 = \sum_{l=1}^{n+1} (l-1)^2$ où $\phi(l) = l-1 = k \Leftrightarrow l = k+1$.

Définition 1.10. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit f une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\prod_{k=0}^n f(k) = f(0) \times f(1) \times \cdots \times f(n-1) \times f(n)$$

Ce résultat ne dépend **jamaïs** de k .

Pour étudier les produits, on utilise la fonction logarithme pour se ramener à l'étude d'une somme.

1.5 Factoriels et Puissances

Définition 1.11. Soit n un entier naturel. L'entier noté $n!$ (qui se lit "factoriel n " ou "factorielle n ") se définit par récurrence comme

$$1! = 1 \quad n! = n \times (n-1)!$$

Par convention, on pose $0! = 1$.

On montre facilement par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

Proposition 1.12. Soit (n, p) deux entiers naturels non nuls tels que $p \leq n$

1. $n! = n \times (n-1)!$
2. $\frac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)$
3. $\frac{n!}{p!} = n \times (n-1) \times \cdots \times (p+1)$

Définition 1.13. Soit n un entier naturel et x un réel. Le nombre réel " x puissance n " noté x^n se définit par récurrence comme

$$x^1 = x \quad x^n = x \times x^{(n-1)}$$

Par convention, on pose $x^0 = 1$.

On montre facilement par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x \times x}_{n \text{ fois}}$$

Proposition 1.14. Soit (n, p) deux entiers naturels

1. $x^n = x \times x^{(n-1)}$
2. $x^{n+p} = x^n \times x^p$
3. $x^{np} = (x^n)^p$

Chapitre 2

Introduction

En mathématiques, on travaille avec des objets abstraits (nombres, ensembles, applications, vecteurs, ...) qui n'ont pas de réalité physique mais qui servent d'intermédiaires de calcul. Pour les utiliser, nous formons des assertions ou propositions logiques sur ces objets qui peuvent être vraies (V) ou fausses (F).

Exemple 2.1. $3 < 5$ est une assertion vraie. $3 > 5$ est une assertion fausse.
On notera souvent P , Q , $R, \dots$ les assertions.

Exercice 2.2. Donner parmi les assertions suivantes celles qui sont vraies ou fausses :

1. " 3 est un entier pair",
2. " $(10 + 2)^2 = 144$ ",
3. " $i^2 > 0$ ".

L'objet des mathématiques est d'énoncer des assertions vraies, utiles et élégantes. Une théorie mathématique se définit par la donnée d'assertions que l'on décide vraies, appelées axiomes.

Dans une théorie, on démontre que certaines assertions sont vraies en utilisant les axiomes et des règles de logique (*cf* chapitre 3). Ces assertions seront appelées théorèmes, propositions, propriétés ou lemmes.

Chapitre 3

Opérations sur les assertions

3.1 Négation

Définition 3.1. Si P est une assertion, on définit une nouvelle assertion, la **négation** de P , notée " $(NON P)$ " ou " $\neg P$ ", qui est fausse si P est vraie et vraie si P est fausse, aussi représentée par le tableau de vérité suivant :

P	$NON P$
F	V
V	F

Exemple 3.2.

- $NON(3 < 5)$ est une assertion fausse.
- $NON(3 = 5)$ est une assertion vraie.

Une théorie est dite contradictoire si elle contient une assertion à la fois vraie et fausse, car dans ce cas toutes les assertions sont à la fois vraies et fausses. On admet que les axiomes utilisés forment une théorie non contradictoire, dite cohérente.

Principe du tiers exclus : Dans la suite, les assertions sont soit vraies, soit fausses, excluant le cas d'assertions indécidables, c'est-à-dire simultanément ni vraies ni fausses.

3.2 Equivalence

Définition 3.3. Si P et Q sont deux assertions, on définit l'assertion $P \Leftrightarrow Q$, lue " P équivalente à Q ", par la table de vérité suivante :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Remarque 3.4. $P \Leftrightarrow Q$ est vraie si et seulement si P et Q sont de même nature, c'est-à-dire vraies simultanément ou fausses simultanément.

Exemple 3.5. "Jean est le fils de Jacques" $\Leftrightarrow$ "Jacques est le père de Jean".

3.3 Conjonction et disjonction

Définition 3.6. Si P et Q sont deux assertions, on définit la conjonction de P et Q , notée " P ET Q " ou $P \wedge Q$ par la table de vérité suivante :

P	Q	P ET Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

L'assertion (P ET Q) est vraie si et seulement si P et Q sont vraies simultanément, elle est fausse dans tous les autres cas.

Définition 3.7. Si P et Q sont deux assertions, on définit la disjonction de P et Q , notée " P OU Q " ou $P \vee Q$, par la table de vérité suivante :

P	Q	P OU Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

L'assertion (P OU Q) est vraie si P est vraie ou si Q est vraie. Elle n'est fausse que si P et Q sont simultanément fausses.

Remarque 3.8. Contrairement à l'utilisation courante de la langue française, le "OU" n'est pas exclusif, c'est-à-dire que la proposition (P OU Q) est vraie si P est vraie ou si Q est vraie ou si les deux sont vraies.

Par exemple, quand il est écrit sur un menu "fromage ou dessert", vous n'avez pas le droit de commander les deux! Mais en mathématique, cela signifie que vous pouvez prendre l'un ou l'autre ou les deux...

Exemple 3.9. ($M. Xia$ désigne un élève de l'INSA) Soit P l'assertion " $M. Xia$ est un élève de l'INSA", Q " $M. Xia$ est lycéen", R " $M. Xia$ a le bac ou un diplôme équivalent". Alors (P ET Q) est fausse, (P OU Q) est vraie, (P ET R) est vraie.

Proposition 3.10 (Commutativité). Pour toutes propositions logiques P et Q , on a toujours les équivalences suivantes :

$$(P \text{ ET } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ ET } P), \quad (3.1)$$

$$(P \text{ OU } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ OU } P). \quad (3.2)$$

Démonstration

P	Q	P ET Q	Q ET P	P OU Q	Q OU P
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V
F	V	F	F	V	V
F	F	F	F	F	F

◇

Proposition 3.11. *Pour toute proposition logique P ,*

$$NON(NON(P)) \Leftrightarrow P. \quad (3.3)$$

$$P \text{ ET } NON(P) \text{ est toujours fausse.} \quad (3.4)$$

$$P \text{ OU } NON(P) \text{ est toujours vraie.} \quad (3.5)$$

Démonstration Ecrivons la table de vérité correspondante :

P	$NON(P)$	$NON(NON(P))$	(3.3)	$P \text{ ET } NON(P)$	$P \text{ OU } NON(P)$
V	F	V	V	F	V
F	V	F	V	F	V

◇

Théorème 3.12 (Lois de Morgan). *Pour deux assertions P et Q , les équivalences suivantes sont toujours vraies :*

$$NON(P \text{ ET } Q) \Leftrightarrow (NON(P) \text{ OU } NON(Q)), \quad (3.6)$$

$$NON(P \text{ OU } Q) \Leftrightarrow (NON(P) \text{ ET } NON(Q)). \quad (3.7)$$

Démonstration Ecrivons la table de vérité de la première proposition :

P	Q	$P \text{ ET } Q$	$NON(P \text{ ET } Q)$	$NON(P)$	$NON(Q)$	$NON(P) \text{ OU } NON(Q)$	(3.6)
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Démontrons l'équivalence 3.7 :

$$\begin{aligned}
 NON(P \text{ OU } Q) &\Leftrightarrow NON[NON(NON(P)) \text{ OU } NON(NON(Q))] && \text{(d'après (3.3))} \\
 &\Leftrightarrow NON[NON(NON(P) \text{ ET } NON(Q))] && \text{(d'après (3.6))} \\
 &\Leftrightarrow NON(P) \text{ ET } NON(Q) && \text{(d'après (3.3)).}
 \end{aligned}$$

◇

Théorème 3.13 (Associativité). *Pour trois assertions P , Q et R , les équivalences suivantes sont toujours vraies :*

$$P \text{ OU } (Q \text{ OU } R) \Leftrightarrow (P \text{ OU } Q) \text{ OU } R, \text{ on écrit } P \text{ OU } Q \text{ OU } R, \quad (3.8)$$

$$P \text{ ET } (Q \text{ ET } R) \Leftrightarrow (P \text{ ET } Q) \text{ ET } R, \text{ on écrit } P \text{ ET } Q \text{ ET } R. \quad (3.9)$$

Démonstration Faisons la preuve de la première équivalence (3.8) :

P	Q	R	Q OU R	P OU (Q OU R)	P OU Q	(P OU Q) OU R
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	F	V
F	F	F	F	F	F	F

◇

Exercice 3.14. *Prouver la seconde équivalence (3.9)*

Théorème 3.15 (Distributivité). *Soit P , Q et R 3 assertions, on a :*

$$P \text{ ET } (Q \text{ OU } R) \Leftrightarrow (P \text{ ET } Q) \text{ OU } (P \text{ ET } R), \quad (3.10)$$

$$P \text{ OU } (Q \text{ ET } R) \Leftrightarrow (P \text{ OU } Q) \text{ ET } (P \text{ OU } R). \quad (3.11)$$

Démonstration Preuve de la distributivité (3.10) de ET sur OU.

P	Q	R	Q OU R	P ET (Q OU R)	P ET Q	P ET R	(P ET Q) OU (P ET R)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Prouvons la seconde équivalence (3.11) : $(\text{NON } P)$, $(\text{NON } Q)$ et $(\text{NON } R)$ sont trois assertions auxquelles nous appliquons la première équivalence (3.10) :

$$\begin{aligned} & (\text{NON } P) \text{ ET } ((\text{NON } Q) \text{ OU } (\text{NON } R)) \\ & \Leftrightarrow ((\text{NON } P) \text{ ET } (\text{NON } Q)) \text{ OU } ((\text{NON } P) \text{ ET } (\text{NON } R)). \end{aligned}$$

D'après les lois de Morgan, elle se réécrit :

$$\begin{aligned} (NON P) \text{ ET } (NON (Q \text{ ET } R)) &\Leftrightarrow (NON (P \text{ OU } Q)) \text{ OU } (NON (P \text{ OU } R)), \\ \text{puis, } NON (P \text{ OU } (Q \text{ ET } R)) &\Leftrightarrow NON ((P \text{ OU } Q) \text{ ET } (P \text{ OU } R)). \end{aligned}$$

On prend maintenant la négation de cette équivalence et on obtient :

$$(P \text{ OU } (Q \text{ ET } R)) \Leftrightarrow ((P \text{ OU } Q) \text{ ET } (P \text{ OU } R)).$$

◇

3.4 Implication

Définition 3.16. Si P et Q sont deux assertions, on définit l'assertion $P \Rightarrow Q$, lue " P implique Q ", par $((NON P) \text{ OU } Q)$:

P	Q	$NON P$	$P \Rightarrow Q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Remarque 3.17.

- Le faux implique n'importe quoi.
- Le vrai est impliqué par n'importe quoi.
- Pour démontrer $P \Rightarrow Q$, on n'a pas à supposer que P est fausse. On suppose que P est vraie et on cherche à démontrer que Q est vraie.
- Quand P est vraie et " $P \Rightarrow Q$ " est vraie, alors Q est vraie.

Exemple 3.18. En reprenant les assertions de l'exemple 3.9, $P \Rightarrow R$.

Exemple 3.19. " $M. Xia$ peut passer le permis de conduire" $\Rightarrow$ " $M. Xia$ a plus de 18 ans".

Remarque 3.20. Pour alléger la phrase, on dira parfois " P " au lieu de " P est vraie" dans la suite (Ceci afin d'éviter des cas comme (" P est vraie") est vraie").

Proposition 3.21. Si P et Q sont deux assertions, alors

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \text{ ET } (Q \Rightarrow P)).$$

Démonstration Ecrivons la table de vérité de la proposition suivante

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$((P \Rightarrow Q) \text{ ET } (Q \Rightarrow P))$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

◇

Remarque 3.22.

- Lorsque l'on a une équivalence $P \Leftrightarrow Q$, on peut donc la démontrer en prouvant l'implication $P \Rightarrow Q$ et l'**implication réciproque** $Q \Rightarrow P$.
- Il faut être prudent lors de l'utilisation de $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ et ne les utiliser qu'avec des symboles mathématiques.

Remarque 3.23.

- Si $P \Rightarrow Q$, on dit que P est une condition suffisante pour que Q soit vraie, et que Q est une condition nécessaire pour que P soit vraie.
- L'assertion $P \Rightarrow Q$ peut aussi se lire "Si P (est vraie), alors Q (est vraie)".
- Si P et Q sont équivalentes, on dit que Q est une condition nécessaire et suffisante pour P .

Théorème 3.24 (Contraposée). Pour deux assertions P et Q , on a :

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow [NON(Q) \Rightarrow NON(P)]. \quad (3.12)$$

La proposition logique $NON(Q) \Rightarrow NON(P)$ s'appelle la contraposée de l'implication $P \Rightarrow Q$.

Démonstration Ecrivons la table de vérité de la proposition :

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$NON(Q)$	$NON(P)$	$NON(Q) \Rightarrow NON(P)$	(3.12)
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

◇

Remarque 3.25. Pour démontrer $P \Rightarrow Q$, il est équivalent et parfois plus aisé de démontrer $(NON\ Q) \Rightarrow (NON\ P)$

Exemple 3.26. Montrer la proposition suivante : n^2 pair $\Rightarrow n$ pair.

Lemme 3.27 (Négation de l'implication). Soit P et Q deux assertions, on a :

$$NON\ (P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P\ ET\ (NON\ Q))$$

Démonstration On applique les lois de Morgan à $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((NON\ P)\ OU\ Q)$. ◇

Théorème 3.28. [Transitivité de l'implication] Soit P , Q et R trois assertions, la proposition

$$[(P \Rightarrow Q)\ ET\ (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R) \quad (3.13)$$

est toujours vraie

Conséquence : Si on a démontré $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R$, on pourra en déduire $P \Rightarrow R$.

Démonstration Supposons $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R$. Supposons maintenant P et montrons R . On a P et $P \Rightarrow Q$, donc Q . Comme on a aussi $Q \Rightarrow R$, on a R . Donc $P \Rightarrow R$. $\diamond$

Théorème 3.29 (Transitivité de l'équivalence). *Soit P , Q et R trois assertions, la proposition*

$$[(P \Leftrightarrow Q) \text{ ET } (Q \Leftrightarrow R)] \Rightarrow (P \Leftrightarrow R) \quad (3.14)$$

est toujours vraie.

Conséquence : Si on a démontré $P \Leftrightarrow Q$ et $Q \Leftrightarrow R$, on pourra en déduire $P \Leftrightarrow R$.

On pourra également écrire une série d'équivalences : $P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow R \Leftrightarrow \dots$

Démonstration Supposons $(P \Leftrightarrow Q)$ et $(Q \Leftrightarrow R)$. En revenant à la définition de l'équivalence, on en déduit d'une part $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R$, et d'autre part $Q \Rightarrow P$ et $R \Rightarrow Q$. D'après la transitivité de l'implication, on en déduit $P \Rightarrow R$ et $R \Rightarrow P$, c'est-à-dire $P \Leftrightarrow R$. $\diamond$

Lemme 3.30 (Disjonction de cas). *Pour 3 assertions P , Q et R , la proposition suivante est vraie :*

$$[(P \text{ OU } Q) \text{ ET } (P \Rightarrow R) \text{ ET } (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow R. \quad (3.15)$$

Démonstration

$$\begin{aligned} & [(P \text{ OU } Q) \text{ ET } (P \Rightarrow R) \text{ ET } (Q \Rightarrow R)] \\ & \Leftrightarrow [(P \text{ OU } Q) \text{ ET } ((P \Rightarrow R) \text{ ET } (Q \Rightarrow R))] && \text{associativité de ET(3.13),} \\ & \Leftrightarrow [P \text{ ET } (P \Rightarrow R) \text{ ET } (Q \Rightarrow R)] \text{ OU } [Q \text{ ET } (P \Rightarrow R) \text{ ET } (Q \Rightarrow R)] && \text{distributivité de ET(3.15),} \\ & \Rightarrow R \text{ OU } R && \text{on utilise les implications,} \\ & \Rightarrow R. \end{aligned}$$

$\diamond$

Exemple 3.31. *Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Montrer que parmi les trois entiers n , $n+1$ et $n+2$, l'un au moins est divisible par 3.*

Test d'assimilation numéro 1

1. Soit P l'assertion "la poule est rousse". Donner $(\text{NON } P)$.
2. Soit Q l'assertion "la fonction f est croissante". Donner $(\text{NON } Q)$.
3. Donner $\text{NON}(\text{NON } P)$. Démontrer-le.
4. Soit B l'assertion "la poule est blanche".
Expliciter en français les assertions $(P \text{ OU } B)$, $(\text{NON } P \text{ OU } \text{NON } B)$, $(P \text{ ET } B)$, $(\text{NON } P \text{ ET } \text{NON } B)$, $\text{NON}(P \text{ OU } B)$, $\text{NON}(P \text{ ET } B)$. Que constate-t-on ?
5. Soit D l'assertion "la fonction f' est positive". D est-elle une condition nécessaire, suffisante ou nécessaire et suffisante pour Q ?
6. Dans quel cas a-t-on $D \Leftrightarrow Q$?
7. Donner la contraposée de $B \Rightarrow P$.
8. Donner la réciproque de $B \Rightarrow P$.
9. Donner la négation de $B \Rightarrow P$.
10. Un père sermonne ses enfants "Si vous n'aidez pas à débarrasser la table, vous ne regarderez pas la télévision après manger". Penauds, les enfants débarrassent la table et pourtant leur père ne leur laisse pas regarder la télévision. Résolvez l'énigme... mathématique, mon cher Watson !

Soient a, b, c trois entiers relatifs et x, y, z trois nombres réels. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, pourquoi ?

1. Si a divise b et si b divise c alors a divise c .
2. Si $x < y$ alors $x^2 < y^2$.
3. $(x < y < 0) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{y} < \frac{1}{x}\right)$.
4. La négation de $(|x| > 1 \text{ OU } x \in [\frac{1}{2}, 3])$ est $(x \in [-1, \frac{1}{2}])$.
5. La négation de $(x \neq 0 \text{ ET } y \neq 0)$ est $(xy = 0)$.
6. Si a^2 est pair alors a est pair.
7. $\sqrt{14}$ est un nombre rationnel.

Chapitre 4

Raisonnement

4.1 Définitions

4.1.1 Convention

Un ensemble est une collection d'éléments, par exemple $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels ...

Si x est un élément de l'ensemble E , *i.e.* si x appartient à E , on note $x \in E$.

La négation de l'assertion $(x \in E)$ est $NON(x \in E) \Leftrightarrow (x \notin E)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n$ n objets mathématiques. On admet qu'il existe un unique ensemble E dont les éléments sont exactement $a_1, \dots, a_n$. On note $E = \{a_1, \dots, a_n\}$, c'est-à-dire qu'un ensemble est noté avec des accolades quand on énumère ses éléments.

Si $n = 1$, E est appelé un singleton : $E = \{a_1\}$.

Si $n = 2$, E est appelé une paire : $E = \{a_1, a_2\}$.

4.1.2 Prédicats

Définition 4.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E_1, \dots, E_n$ n ensembles. On appelle **prédicat** à n indéterminées $x_1, \dots, x_n$ dans $E_1, \dots, E_n$ tout énoncé mathématique qui dépend de $x_1, \dots, x_n$ qui devient une assertion quand on remplace x_1 par un élément de $E_1, \dots, x_n$ par un élément de E_n .

Exemple 4.2. $P(x)$: " $x < 5$ " est un prédicat à une indéterminée sur $\mathbb{R}$.

$Q(x)$: " x est impair" est un prédicat à une indéterminée sur $\mathbb{Z}$.

$R(x, y)$: " $x \leq y$ " est un prédicat à deux indéterminées sur $\mathbb{R}$.

On admet que les prédicats, étudiés cette année, à une indéterminée sur un ensemble E sont collectivisants, *i.e.* les $x \in E$ vérifiant $P(x)$ forment un ensemble F , noté $F = \{x \in E, P(x)\}$.

Exemple 4.3. $P(x)$: " x entier ≥ 2 dont les seuls diviseurs sont 1 et x ". L'ensemble $\{x \in \mathbb{N}, P(x)\}$ est l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers.

4.1.3 Quantificateurs

Soit E un ensemble et $P(x)$ un prédicat à une indéterminée sur E .

Définition 4.4. "Quelque soit : $\forall$ "

$$\forall x \in E, P(x)$$

se lit "quelque soit x appartenant à E , $P(x)$ " et signifie que tous les x éléments de E vérifient le prédicat $P(x)$.

Exemple 4.5. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.

Définition 4.6. "Il existe : $\exists$ "

$$\exists x_0 \in E \text{ tel que } P(x_0)$$

se lit "il existe x_0 appartenant à E tel que $P(x_0)$ et signifie qu'il existe au moins un x_0 élément de E qui vérifie le prédicat $P(x)$.

Attention ! On ne sait pas *a priori* quel x_0 convient. On sait juste qu'il existe et on peut travailler formellement avec.

Exemple 4.7.

- $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 5$ (par exemple $6 \in \mathbb{R}$ et $6 > 5$).
- $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $x = 5$ (il n'y en a qu'un seul : $x = 5$).

Après un $\exists$, le "tel que" est souvent remplacé par une virgule ou un $|$.

Définition 4.8. " $\exists!$ "

$$\exists! x \in E, P(x)$$

se lit "il existe un unique x appartenant à E tel que $P(x)$ ".

Exemple 4.9. $\exists! x \in E, x = 5$.

4.1.4 Règles d'utilisation

Nous allons donner les règles qui régissent l'utilisation de ces quantificateurs avec les signes logiques.

Négation

$$[NON(\forall x \in E, P(x))] \Leftrightarrow [\exists x \in E, NON(P(x))], \quad (4.1)$$

$$[NON(\exists x \in E, P(x))] \Leftrightarrow [\forall x \in E, NON(P(x))]. \quad (4.2)$$

Exemple 4.10. Donner la négation des assertions suivantes : "Tous les joueurs du stade toulousain ont un maillot rouge et noir", "Il existe un étudiant de l'INSA qui est champion d'Europe de Kayak."

Distributivité

$$[\exists x \in E, (P(x) \text{ OU } Q(x))] \Leftrightarrow [\exists x \in E, P(x)] \text{ OU } [\exists x \in E, Q(x)], \quad (4.3)$$

$$[\forall x \in E, (P(x) \text{ ET } Q(x))] \Leftrightarrow [\forall x \in E, P(x)] \text{ ET } [\forall x \in E, Q(x)]. \quad (4.4)$$

Attention ! Dans le cas des deux propositions suivantes, seule l'implication est vraie.

$$\exists x \in E, (P(x) \text{ ET } Q(x)) \Rightarrow [\exists x \in E, P(x)] \text{ ET } [\exists x \in E, Q(x)], \quad (4.5)$$

$$[\forall x \in E, P(x)] \text{ OU } [\forall x \in E, Q(x)] \Rightarrow \forall x \in E, (P(x) \text{ OU } Q(x)) \quad (4.6)$$

Pour ces deux propositions, les réciproques sont fausses !

Exemple 4.11. Soit E l'ensemble des étudiants de l'INSA. On appelle $P(x)$ le prédicat "l'étudiant x possède un ordinateur" et $Q(x)$ le prédicat "l'étudiant x possède un vélo". Traduire en français les phrases mathématiques (4.3), (4.4), (4.5) et (4.6).

Commutativité Soit E_1 et E_2 deux ensembles et $P(x, y)$ un prédicat à deux indéterminées sur E_1 et E_2 .

Lorsque les deux quantificateurs sont de même nature, les propositions suivantes sont vraies :

$$\forall x \in E_1, \forall y \in E_2, P(x, y) \Leftrightarrow \forall y \in E_2, \forall x \in E_1, P(x, y), \quad (4.7)$$

$$\exists x \in E_1, \exists y \in E_2, P(x, y) \Leftrightarrow \exists y \in E_2, \exists x \in E_1, P(x, y). \quad (4.8)$$

Lorsque les deux quantificateurs sont de nature différente, seule l'implication suivante est vraie :

$$\exists x \in E_1, \forall y \in E_2, P(x, y) \Rightarrow \forall y \in E_2, \exists x \in E_1, P(x, y) \quad (4.9)$$

Dans la première moitié de l'implication 4.9, il existe un $x \in E_1$ qui marche avec **tous** les $y \in E_2$, alors que dans la seconde moitié, pour tout $y \in E_2$ il existe un $x \in E_1$ **qui dépend de y** .

Exemple 4.12. Si J est l'ensemble des jours de l'année et H l'ensemble des heures de la journée, traduire en français les assertions mathématiques suivantes où $P(j, h)$ signifie "le soleil se couche le jour j à l'heure h ".

1. $\exists h \in H, \forall j \in J, P(j, h)$

2. $\forall j \in J, \exists h \in H, P(j, h)$

Sont-elles équivalentes ?

Remarque 4.13.

- Pour démontrer $(\forall x \in E, P(x))$, on écrit : soit $x \in E$, montrons que $P(x)$ est vraie.
- Pour démontrer $(\exists x \in E, P(x))$, on écrit : on cherche $x \in E$ tel que $P(x)$ soit vraie. On pose $x = \dots$ (il faut le trouver). On montre ensuite qu'il convient.

4.2 Méthodes de raisonnement

4.2.1 Le contre-exemple

En vertu de l'assertion 4.1, pour prouver " $NON(\forall x \in E P(x))$ ", il suffit de trouver un contre-exemple, c'est-à-dire de trouver un seul élément $x \in E$ qui vérifie $NON(P(x))$.

Exemple 4.14. Montrons que $(\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0)$ est fausse. Considérons $x_0 = -1$. $x_0 \in \mathbb{R}$ et $x_0 < 0$. On a donc trouvé un exemple à la proposition : $\exists x_0 \in \mathbb{R}, x_0 < 0$ ce qui équivaut à un contre-exemple à la proposition $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0$.

4.2.2 Raisonnement par l'absurde

En vertu de l'assertion (3.4), on peut aussi raisonner par l'absurde pour démontrer une propriété P :

On effectue l'hypothèse de départ $NON(P)$. Si on réussit à démontrer grâce à cette hypothèse un résultat faux (par exemple que pour une autre assertion Q , Q et $NON(Q)$ sont vraies simultanément), on arrive à une absurdité. Cela signifie que l'assertion $NON(P)$ est fausse, et donc P est vraie.

Exemple 4.15. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exemple 4.16. Pour prouver une implication $P \Rightarrow Q$, on peut raisonner par l'absurde : on suppose $NON(P \Rightarrow Q)$, c'est-à-dire $(P \text{ ET } NON(Q))$, et on essaie de démontrer à partir de toutes ces hypothèses un résultat faux.

4.2.3 Raisonnement par récurrence

Soit un prédicat $P(n)$ dépendant d'un entier $n \in \mathbb{N}$. On souhaite démontrer que ce prédicat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ ou à partir d'un certain rang.

Théorème 4.17 (Principe de récurrence). Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.

Si $P(n_0)$ est vraie (Initialisation) et $\forall n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ (Hérédité) alors $\forall n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

Démonstration Raisonnons pas l'absurde : Soit $I_{n_0} = \{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\}$.

Supposons que $NON[\forall n \in I_{n_0} P(n)]$. Alors $\exists n \in I_{n_0}$, $NON(P(n))$. Soit n_1 le plus petit entier qui vérifie $NON(P(n))$. Comme on a supposé $P(n_0)$, on en déduit que $n_1 \in \mathbb{N}^*$. $n_1 - 1 \in \mathbb{N}$, et par définition de n_1 , $P(n_1 - 1)$ est vraie. En utilisant l'hérédité, il en découle que $P(n_1)$ est vraie. Ceci est absurde puisque, par définition de n_1 , $P(n_1)$ est fausse. L'hypothèse additionnelle est donc fausse, donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $P(n)$ est vraie. $\diamond$

Remarque 4.18. Pour démontrer un résultat par un raisonnement par récurrence, il faut tout d'abord énoncer proprement l'hypothèse de récurrence $P(n)$, démontrer l'initialisation, c'est-à-dire que $P(n_0)$ est vraie, et ensuite prouver l'hérédité ($P(n) \Rightarrow P(n+1)$). On conclut alors en appliquant le principe de récurrence.

Exemple 4.19. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Définition de l'assertion à démontrer : pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle $P(n)$ l'assertion

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Initialisation : $n = 0$. On a $\sum_{k=0}^0 k = 0 = \frac{0 \times 1}{2}$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a supposé $P(n)$ vraie donc $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$. Calculons $\sum_{k=0}^{n+1} k$: on a

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

On a donc prouvé $P(n+1)$ et ainsi l'hypothèse de récurrence : " $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ ".

Conclusion : On applique le principe de récurrence, et on en conclut que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $P(n)$, i.e. $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Remarque 4.20. Pour démontrer certains résultats par récurrence, on peut être amené à faire des hypothèses légèrement différentes :

- **Récurrence limitée :** L'hypothèse de récurrence peut n'être vraie que pour tout entier n tel que $n_0 \leq n \leq n_1$. Dans ce cas, on ne peut prouver l'hérédité que pour $n_0 \leq n < n_1$ et on obtient comme conclusion " $\forall n \in \{n_0, \dots, n_1\} \quad P(n)$ ".
- **Récurrence descendante :** Soit $P(n)$ un prédicat sur $\mathbb{N}$, $n_0 < n_1$. Si $P(n_1)$ est vraie et $\forall n \in \{n_0 + 1, \dots, n_1\}$ on a $P(n) \Rightarrow P(n-1)$ alors $\forall n \in \{n_0, \dots, n_1\} \quad P(n)$.
- **Récurrence forte :** On a parfois besoin de connaître en plus de $P(n)$ les propriétés $P(n-1), P(n-2), \dots$ pour conclure :
Soit $P(n)$ un prédicat sur $\mathbb{N}$, $n_0 \in \mathbb{N}$. Si $P(n_0)$ est vraie et que pour tout $n \geq n_0$ on a $(\forall k \in \{n_0, \dots, n\} \quad P(k)) \Rightarrow P(n+1)$ (on suppose que le prédicat est vrai pour toutes les valeurs inférieures à n pour réussir à prouver qu'il est vrai au rang $n+1$) alors $\forall n \geq n_0, P(n)$.

Exercice 4.21. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle de Fibonacci définie par $u_0 = 0, u_1 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$.

4.2.4 Raisonnement par analyse-synthèse

Le raisonnement par analyse-synthèse intervient lorsqu'on veut démontrer l'existence de quelque chose (souvent un élément vérifiant un prédicat) mais que cette démonstration suppose de connaître au préalable la forme de cet élément. On raisonne alors en deux temps :

1. D'abord, on suppose connue l'existence de cet élément et on cherche sa forme.
2. Ensuite, on montre l'existence de cet élément vérifiant le prédicat.

Exemple 4.22. (cf la feuille de TD 1 de l'UV "outils de Calculs") Montrons que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires et $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires. On doit donc montrer que

$$\forall f \in \mathcal{F}, \quad \exists (p, i) \in \mathcal{P} \times \mathcal{I}, \quad f = p + i$$

Raisonnons par analyse synthèse.

1. **Analyse :** Soit $f \in \mathcal{F}$. Si le couple (p, i) existe alors $\exists (p, i) \in \mathcal{P} \times \mathcal{I}, f = p + i$. Or $p \in \mathcal{P}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, p(-x) = p(x)$. De même, $i \in \mathcal{I}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, i(-x) = -i(x)$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} f(x) = p(x) + i(x) \\ f(-x) = p(x) - i(x) \end{cases}$$

En faisant la somme et la différence des deux lignes précédentes, on résout ce système par équivalence et on obtient

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

On a ainsi identifié à quoi ressemblent les fonctions p et i de la décomposition recherchée.

2. **Synthèse :** Reprenons maintenant la démonstration au début. Soit $f \in \mathcal{F}$. Montrons que la décomposition $p+i$ existe. D'après la remarque 4.13, on doit vérifier que les p et i trouvés précédemment conviennent. Soient donc p et i les fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{f(x) + f(-x)}{2} \\ i(x) &= \frac{f(x) - f(-x)}{2} \end{aligned}$$

Alors, $\forall x \in \mathbb{R}, p(-x) = p(x)$ et $i(-x) = -i(x)$. Ainsi, on a $p \in \mathcal{P}$ et $i \in \mathcal{I}$.

On a ainsi démontré que

$$\forall f \in \mathcal{F}, \quad \exists (p, i) \in \mathcal{P} \times \mathcal{I}, \quad f = p + i$$

On a même démontré l'unicité de cette décomposition !

Test d'assimilation numéro 2

1. Identifiez les assertions correctes

$$3 \in \mathbb{N} \quad \pi \notin \mathbb{Q} \quad -1 \in \mathbb{N} \quad e \in \mathbb{R}$$

2. Ecrire un prédicat vrai pour tout réel.
3. Ecrire un prédicat faux pour tout réel.
4. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Si elles sont vraies, les démontrer, sinon donner leur négation.
- a. $\forall x \in \mathbb{R}, (x+1)^2 > 0$
 - b. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = -1$
 - c. $\exists x \in \mathbb{C}, x^2 = -1$
 - d. $\exists! x \in \mathbb{R}, 2x^2 + 3x + 1 = 0$
 - e. $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (xz = yz \Rightarrow x = y)$
5. Dites si pour démontrer les assertions suivantes, un contre-exemple est nécessaire ou pas. Démontrez-les :
- a. $\forall x \in \mathbb{R}, (x+1)^2 < 0$
 - b. $\exists x \in \mathbb{C}, x^2 = -1$
 - c. Toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est croissante.
 - d. Toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable est continue.
 - e. Toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue est dérivable.
6. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses, pourquoi ?
- a. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in [0, 1], 0 \leq S_n(x) \leq M$
 - b. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], 0 \leq S_n(x) \leq M$
 - c. $\forall x \in [0, 1[, \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq S_n(x) \leq M$
7. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_{n+1} = ku_n$ et $u_0 \in \mathbb{R}$ (suite géométrique de raison k). Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = k^n u_0$. (Refaire cet exercice avec une suite arithmétique de raison r)
8. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k$ et $u_0 > 0$. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
9. Montrer que tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ du plan non nul s'écrit de manière unique en coordonnées polaires.

Chapitre 5

Ensembles

5.1 Inclusion, Égalité

Définition 5.1. Soit E et F deux ensembles. On dit que E est **inclus** dans F , noté $E \subset F$, si

$$\forall x (x \in E \Rightarrow x \in F).$$

Sinon, on note $E \not\subset F$. Si $E \subset F$, on dit que E est une partie ou un sous-ensemble de F .

Remarque 5.2. Pour démontrer $E \subset F$, il faut démontrer l'implication

$$\forall x (x \in E \Rightarrow x \in F).$$

On écrit donc "Soit $x \in E$ " et on montre que $x \in F$.

Exemple 5.3. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, $\{3\} \subset \mathbb{N}$, $\{-1, 6\} \subset \mathbb{Z}$, $\{\pi, 0\} \not\subset \mathbb{Q}$

Définition 5.4. On dit que E et F sont **égaux** si $E \subset F$ et $F \subset E$. On le note $E = F$

$$E = F \Leftrightarrow [\forall x (x \in E \Leftrightarrow x \in F)].$$

Remarque 5.5. Il ne faut pas confondre $\in$ et $\subset$: si x est un élément, E , F et G des ensembles, on peut avoir $x \in E$ et $F \subset G$.

Un élément peut être considéré comme un ensemble : une droite est un ensemble de points mais un élément de l'ensemble des droites du plan.

Remarque 5.6. Pour montrer que deux ensembles E et F sont égaux, il faut démontrer l'équivalence $\forall x (x \in E \Leftrightarrow x \in F)$. On pose donc un x quelconque. Soit on raisonne directement par équivalence et on montre $(x \in E \Leftrightarrow x \in F)$. Soit on démontre deux implications, c'est-à-dire une double inclusion : d'abord on montre $E \subset F$, c'est-à-dire que SI $x \in E$ ALORS $x \in F$ puis que $F \subset E$, c'est-à-dire que SI $x \in F$ ALORS $x \in E$.

Proposition 5.7 (Transitivité de l'inclusion). Soit E un ensemble, A , B et C trois parties de E ,

$$[(A \subset B) \text{ ET } (B \subset C)] \Rightarrow (A \subset C).$$

Démonstration Supposons $A \subset B$ et $B \subset C$. Montrons que $A \subset C$. Soit $x \in A$. Comme $A \subset B$, $x \in B$. On a aussi $B \subset C$ donc $x \in C$. Donc $\forall x \in E$, $(x \in A \Rightarrow x \in C)$. Donc $A \subset C$. $\diamond$

Proposition 5.8 (Transitivité de l'égalité). *Soit E un ensemble, A , B et C trois parties de E ,*

$$[(A = B) \text{ ET } (B = C)] \Rightarrow (A = C).$$

Démonstration Supposons $A = B$ et $B = C$. Par définition, on a $A \subset B$ et $B \subset C$, et par transitivité de l'inclusion, on en déduit $A \subset C$. De même, on $B \subset A$ et $C \subset B$, et par transitivité, on en déduit $C \subset A$. D'où $A = C$. $\diamond$

5.2 Opération sur les parties de E

5.2.1 Complémentaire

Définition 5.9 (Complémentaire). *Soit E un ensemble et A une partie de E . Le **complémentaire** de A dans E , noté $\complement_E A$, est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A :*

$$\complement_E A = \{x \in E, x \notin A\}.$$

C'est une partie de E . $\complement_E A$ est aussi noté $\overline{A}$ ou A^c lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion.

Exemple 5.10. $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 3\} \subset E$ et $\complement_E A = \{2, 4, 5\} \subset E$.

Proposition 5.11. *Soit E un ensemble, A et B deux parties de E . Alors*

- i) $(A^c)^c = A$,
- ii) si $A \subset B$, alors $B^c \subset A^c$.

Démonstration i) Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in (A^c)^c &\Leftrightarrow x \notin A^c \\ &\Leftrightarrow \text{NON}(x \in A^c) \\ &\Leftrightarrow \text{NON}(x \notin A) \\ &\Leftrightarrow x \in A. \end{aligned}$$

ii) Supposons $A \subset B$. Soit $x \in B^c$, montrons que $x \in A^c$. Comme $A \subset B$, $\forall y \in E$, $y \in A \Rightarrow y \in B$. Par contraposition,

$$\forall y \in E, (y \notin B) \Rightarrow (y \notin A).$$

Or $x \notin B$, donc $x \notin A$, et $x \in E$. On en déduit $x \in A^c$. $\diamond$

5.2.2 Ensemble vide

Théorème 5.12. *Il existe un unique ensemble ne contenant aucun élément. Cet ensemble s'appelle l'ensemble vide et se note $\emptyset$.*

Démonstration

Existence :

Soit E un ensemble et $V = \complement_E E$. Montrons que V convient. On a :

$$\begin{aligned} x \in V &\Leftrightarrow x \in \complement_E E \\ &\Leftrightarrow x \in E \text{ ET } x \notin E, \text{ ce qui est faux.} \end{aligned}$$

Donc $\forall x, x \notin V$.

Unicité : Soit V_1 et V_2 deux ensembles vérifiant l'hypothèse. Montrons que $V_1 = V_2$.

Soit F un ensemble. Montrons que $V_1 \subset F$.

$x \in V_1$ est faux, donc $(x \in V_1) \Rightarrow (x \in F)$, $V_1 \subset F$. De même, on a $V_2 \subset F$. En prenant $F = V_2$, on a $V_1 \subset V_2$ et en prenant $F = V_1$, on obtient $V_2 \subset V_1$. Donc $V_1 = V_2$ $\diamond$

5.2.3 Ensemble des parties de E

Définition 5.13. *Soit E un ensemble. L'ensemble des parties de E se note $\mathcal{P}(E)$:*

$$\mathcal{P}(E) = \{X, X \subset E\}.$$

En particulier,

$$X \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow X \subset E$$

Exemple 5.14. *Soit $E = \{2, 3\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}, E\}$.*

Exemple 5.15. *Soit $E = \{1, 2, 3\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, E\}$.*

5.3 Intersection, Union

Définition 5.16 (Intersection, union). *Soit E un ensemble, A et B deux parties de E . On appelle **intersection** de A et de B la partie de E , notée $A \cap B$ (" A inter B "), définie par :*

$$A \cap B = \{x \in E, (x \in A) \text{ ET } (x \in B)\}.$$

*On appelle **union** de A et de B la partie de E , notée $A \cup B$ (" A union B "), définie par :*

$$A \cup B = \{x \in E, (x \in A) \text{ OU } (x \in B)\}.$$

Exemple 5.17. $E = \mathbb{N}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{2, 4, 6, 8\}$. Alors $A \cap B = \{2, 4\}$ et $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$.

Remarque 5.18. *Pour démontrer que $x \in A \cap B$, il faut et il suffit de montrer que $x \in A$ ET $x \in B$.*

Pour démontrer que $x \in A \cup B$, il faut et il suffit de montrer que $x \in A$ OU $x \in B$.

Proposition 5.19. *Soit E un ensemble, A et B deux parties de E*

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A, \quad (5.1)$$

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B. \quad (5.2)$$

Démonstration Prouvons (5.1) :

Supposons $A \subset B$. Alors $\forall x \in A, x \in B$, donc $x \in A \cap B$. On a ainsi $A \subset A \cap B$. Par définition de $A \cap B$, on a toujours $A \cap B \subset A$. On a donc prouvé que $A \cap B = A$.

Supposons maintenant $A \cap B = A$. Alors $\forall x \in A, x \in A \cap B$, or $A \cap B \subset B$, donc $x \in B$. Prouvons (5.2) :

Supposons $A \subset B$. Alors $A \cup B \subset B \cup B = B$, et par définition $B \subset A \cup B$. Réciproquement, supposons $A \cup B = B$. Soit $x \in A, x \in A \cup B = B$, donc $x \in B$. $\diamond$

Proposition 5.20. *Soit E un ensemble et A une partie de E*

$$\begin{aligned} A \cup \emptyset &= A, & A \cap \emptyset &= \emptyset \\ A \cup \complement_E A &= E & A \cap \complement_E A &= \emptyset. \end{aligned}$$

Démonstration On applique les propositions (5.1) et (5.2) avec $\emptyset$ et A (on a $\emptyset \subset A$) pour obtenir les deux premières propriétés.

Par définition, $A \cup \complement_E A \subset E$. Soit $x \in E$, soit $x \in A$ est vraie, soit $NON(x \in A)$ est vraie (par principe du tiers exclus), donc $x \in A$ ou $x \in \complement_E A$, i.e. $x \in A \cup \complement_E A$. On a ainsi montré $E \subset A \cup \complement_E A$.

De même, $\emptyset \subset A \cap \complement_E A$. Raisonnons par l'absurde : Supposons qu'il existe $x \in A \cap \complement_E A$, alors $x \in A$ et $NON(x \in A)$, ce qui est absurde. Donc il n'existe pas de x appartenant simultanément à A et à son complémentaire, donc $A \cap \complement_E A$ est l'ensemble vide. $\diamond$

Proposition 5.21 (Commutativité). *Soit E un ensemble, A et B deux parties de E ,*

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A.$$

Démonstration On utilise la commutativité de ET et OU :

$$A \cap B = \{x \in E, x \in A \text{ ET } x \in B\} = \{x \in E, x \in B \text{ ET } x \in A\} = B \cap A.$$

$$A \cup B = \{x \in E, x \in A \text{ OU } x \in B\} = \{x \in E, x \in B \text{ OU } x \in A\} = B \cup A. \quad \diamond$$

Proposition 5.22 (Associativité). *Soit E un ensemble, A, B et C trois parties de E ,*

$$\begin{aligned} A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C && \text{on écrit } A \cap B \cap C, \\ A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C && \text{on écrit } A \cup B \cup C. \end{aligned}$$

Démonstration On revient à la définition de l'ensemble et on utilise l'associativité de ET et OU.

$$\begin{aligned} A \cap (B \cap C) &= \{x \in E, x \in A \text{ ET } (x \in B \text{ ET } x \in C)\} \\ &= \{x \in E, (x \in A \text{ ET } x \in B) \text{ ET } x \in C\} = (A \cap B) \cap C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A \cup (B \cap C) &= \{x \in E, x \in A \text{ OU } (x \in B \text{ ET } x \in C)\} \\
&= \{x \in E, (x \in A \text{ OU } x \in B) \text{ ET } x \in C\} = (A \cup B) \cap C.
\end{aligned}$$

◇

Proposition 5.23 (Distributivité). *Soit E un ensemble, A , B et C trois parties de E ,*

$$\begin{aligned}
A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \\
A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C).
\end{aligned}$$

Démonstration On revient à la définition de l'ensemble et on utilise la distributivité de ET (resp. OU) sur OU (resp. ET). ◇

Exercice 5.24. *Si $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 3\}$, $B = \{4, 5\}$ et $C = \{2, 3, 4\}$, donner les ensembles $A \cap (B \cup C)$, $A \cup (B \cap C)$, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$, $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ et vérifier les égalités associées à la distributivité de l'union et de l'intersection.*

Proposition 5.25 (Lois de Morgan). *Soit E un ensemble, A et B deux parties de E ,*

$$\begin{aligned}
\complement_E(A \cup B) &= \complement_E A \cap \complement_E B, \\
\complement_E(A \cap B) &= \complement_E A \cup \complement_E B.
\end{aligned}$$

Démonstration On revient à la définition de l'ensemble et on utilise les lois de Morgan pour en déduire le résultat. ◇

Exercice 5.26. *Si $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 3, 4\}$ et $B = \{3, 4, 5\}$, donner les ensembles $\complement_E(A \cup B)$, $\complement_E(A \cap B)$, $\complement_E A \cap \complement_E B$, $\complement_E A \cup \complement_E B$ et vérifier les égalités associées aux lois de Morgan.*

5.4 Produit cartésien

Définition 5.27 (Produit cartésien). *Soit E et F deux ensembles. On définit $E \times F$, le produit cartésien de E et F , comme l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$.*

$$E \times F = \{(x, y), (x \in E) \text{ ET } (y \in F)\}.$$

Exemple 5.28. $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{2, 4\}$. $E \times F = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$.

Exemple 5.29. *Si $E = F = \mathbb{R}$, $E \times F = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$*

Remarque 5.30.

- Soit E et F deux ensembles, et $(x, y) \in E \times F$. x s'appelle la première coordonnée de (x, y) et y la seconde coordonnée de (x, y) .
- si $E = F$, $E \times F = E \times E$ se note E^2 .

Définition 5.31. *Soit $n \geq 3$, $E_1, \dots, E_n$ n ensembles, $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$.*

On pose, par récurrence, $(x_1, \dots, x_n) = ((x_1, \dots, x_{n-1}), x_n)$ le n -uplet formé par $x_1, \dots, x_n$ et $E_1 \times \dots \times E_n = (E_1 \times \dots \times E_{n-1}) \times E_n$.

Si E est un ensemble et si $\forall i \in \{1, \dots, n\} E_i = E$, alors $E_1 \times \dots \times E_n = E \times \dots \times E = E^n$.

5.5 Famille d'éléments et partition d'un ensemble

Soit E un ensemble, I un ensemble non vide. On généralise ici à un ensemble quelconque d'indices I les définitions de l'union, de l'intersection et du produit cartésien vues précédemment pour deux ensembles.

Définition 5.32. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E . On pose :

- $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E, \exists i \in I, x \in A_i\}$.
 $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ si et seulement si il existe un $i \in I$ tel que $x \in A_i$.
- $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E, \forall i \in I, x \in A_i\}$.
 $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ si et seulement si pour tout $i \in I$, on a $x \in A_i$.
- $\prod_{i \in I} A_i = \{(x_i)_{i \in I}, \forall i \in I, x_i \in A_i\}$.
 $x \in \prod_{i \in I} A_i$ si et seulement si $x = (x_i)_{i \in I}$ avec pour tout $i \in I$, $x_i \in A_i$.

Exemple 5.33. Si $I = \mathbb{N}$, $\bigcup_{i \in I} \{2i\}$ est l'ensemble des nombres pairs. Si $I = \mathbb{R}$, $\bigcup_{i \in I} \{i\} = \mathbb{R}$

Remarque 5.34.

- Par convention, on notera : $\bigcup_{i \in \emptyset} A_i = \emptyset$ et $\bigcap_{i \in \emptyset} A_i = E$.
- Si $I = \{1, \dots, n\}$, on confondra $(x_i)_{i \in I}$ et $(x_1, \dots, x_n)$ et donc $\prod_{i \in I} A_i$ et $A_1 \times \dots \times A_n$.
- Toutes les propriétés énoncées précédemment se généralisent au cas de famille d'ensembles.

Exercice 5.35. Refaire les démonstrations sur les intersections et unions dans le cas d'une famille d'ensembles indicés par $i \in I$.

Définition 5.36 (Partition d'un ensemble). Soit $\Pi = (A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E . On dit que $(A_i)_{i \in I}$ forme une **partition** de l'ensemble E si et seulement si

1. $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$,
2. $\forall (i, j) \in I^2, (A_i \neq A_j) \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$,
3. $\bigcup_{i \in I} A_i = E$.

Exemple 5.37. Le partage d'un gâteau est une partition du gâteau en parts.

Si $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 4, 5\}$, $B = \{2\}$ et $C = \{3\}$ alors A, B, C forment une partition de E .

Si $E = \mathbb{N}$, $\mathcal{P} = \{2n, n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des nombres pairs et $\mathcal{I} = \{2n + 1, n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des nombres impairs alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ forment une partition de E .

Si $E = \mathbb{R}$, $(\{x\})_{x \in \mathbb{R}}$ est une partition de E .

Test d'assimilation numéro 3

1. Identifiez les assertions correctes

$$3 \in \mathbb{N} \quad \{3\} \in \mathbb{N} \quad \{3\} \subset \mathbb{N} \quad \{3, 5\} \in \mathbb{N} \quad \{3, \{5\}\} \subset \mathbb{N}$$

2. Même question

$$\{\emptyset, 3\} \in \mathbb{N} \quad \{\emptyset, \{3\}\} \in \mathbb{N} \quad \{\emptyset, \{3\}\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \quad \{\emptyset, 3\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}) \quad \{\emptyset, 3\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

3. Si $E = \{1, 2, 3, 4\}$, donner $\mathcal{P}(E)$.
4. Si $E = \{1, 2, 3\}$ et $A = \emptyset$, donner $\mathcal{C}_E A$ et $\mathcal{C}_{\mathcal{P}(E)} A$.
5. Rappelez les définitions de $A \cap B$ et $A \cup B$.
6. Démontrer l'associativité de l'intersection.
7. Montrer que $A \cap (B \cap (C \cup D)) = (A \cap C \cap B) \cup (A \cap B \cap D)$.
8. Donner une partition de $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ avec un sous-ensemble de E . Même question avec deux puis trois, quatre et cinq sous-ensembles.
9. Si $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{x, y, z\}$, donner $E \times F$ et $F \times E$, $E \cap F$ et $E \cup F$.
10. Soit $E = F = \mathbb{N}$, que représente $E \times F$?

Soient A, B, C, E des ensembles. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, pourquoi?

1. Si $A \subset \mathbb{R}$ alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \notin A$.
2. $\mathbb{R}^+ = \{\sqrt{x^2}, x \in \mathbb{R}\}$.
3. Si $A \cup B \subset A \cup C$ alors $B \subset C$.
4. Si $A \cap B \subset A \cap C$ alors $B \subset C$.
5. Si A et B sont deux sous-ensembles de E alors $A \subset B \Leftrightarrow \mathcal{C}_E B \subset \mathcal{C}_E A$
6. Si $x \in E$ alors $x \in \mathcal{P}(E)$.
7. $\bigcap_{n=1}^{+\infty} [3, 3 + \frac{1}{n^2}] = 3$.
8. $\bigcap_{n=1}^{+\infty} [-2 - \frac{1}{n}, 4 + n^2] = [-2, 5]$.

Chapitre 6

Relations binaires

6.1 Définitions

Soit E et F deux ensembles non vides.

Définition 6.1. On appelle **graphe** de E vers F toute partie du produit cartésien $E \times F$. On rappelle que $E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ ET } y \in F\}$.

Définition 6.2. Soit $\mathcal{G}$ un graphe de E vers F . Un prédicat $\mathcal{R}$ à deux indéterminées dans E et F défini par

$$(\forall (x, y) \in E \times F)(\mathcal{R}(x, y) \iff (x, y) \in \mathcal{G}),$$

s'appelle une **relation** de E vers F .

La plupart du temps, on définit une relation par le prédicat $\mathcal{R}$, on écrit $x \mathcal{R} y$ au lieu de $\mathcal{R}(x, y)$ et on dit que " x est en relation avec y pour la relation $\mathcal{R}$ ". Le graphe $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$ de la relation $\mathcal{R}$ peut alors être défini par

$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}} = \{(x, y) \in E \times F, x \mathcal{R} y\}.$$

Exemple 6.3. Soit $E = \{0, 1, 2\}$, $F = \{a, b, c, d\}$. Alors le produit cartésien $E \times F$ est donné par

$$E \times F = \{(0, a), (1, a), (2, a), (0, b), (1, b), (2, b), (0, c), (1, c), (2, c), (0, d), (1, d), (2, d)\}$$

Soit le graphe $\mathcal{G} = \{(0, a), (0, d), (1, b), (2, c)\}$. On note $\mathcal{R}$ la relation définie par $\mathcal{G}$. Alors $0 \mathcal{R} a$ mais 2 et b ne sont pas en relation. Donner d'autres exemples d'éléments qui sont en relation pour la relation $\mathcal{R}$ et d'autres qui ne sont pas en relation.

Définition 6.4. On appelle **relation binaire** une relation de E vers E .

6.2 Propriétés

Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E .

Définition 6.5.

1. La relation $\mathcal{R}$ est **réflexive** si $(\forall x \in E)(x \mathcal{R} x)$.
2. La relation $\mathcal{R}$ est **symétrique** si $(\forall (x, y) \in E^2)(x \mathcal{R} y \implies y \mathcal{R} x)$.
3. La relation $\mathcal{R}$ est **antisymétrique** si $(\forall (x, y) \in E^2)(x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} x \implies x = y)$.
4. La relation $\mathcal{R}$ est **transitive** si $(\forall (x, y, z) \in E^3)(x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z \implies x \mathcal{R} z)$.

Exemple 6.6. On considère sur l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ les relations binaires $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ définies par leur graphe

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{\mathcal{R}} &= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\} \\ \text{et } \mathcal{G}_{\mathcal{S}} &= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 1)\}.\end{aligned}$$

Les relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont-elles réflexives ? symétriques ? antisymétriques ? transitives ? On pourra faire un dessin des graphes $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$ et $\mathcal{G}_{\mathcal{S}}$ et on prendra soin à la rédaction des réponses !

6.3 Relations d'équivalence

6.3.1 Définition

Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E .

Définition 6.7. La relation binaire $\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence** si elle est :

1. réflexive,
2. symétrique,
3. transitive.

Exemple 6.8.

Montrer que, dans les deux exemples suivants, $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E :

1. $E = \mathbb{R}$ et $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2)(x \mathcal{R} y \iff x = y)$.
2. $E = \mathbb{Z}$ et $(\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2)(x \mathcal{R} y \iff x - y \text{ est divisible par } 2)$.

On prendra soin de bien rédiger la démonstration.

Remarque 6.9. La notion de relation d'équivalence est une généralisation formelle de la notion d'égalité dans $\mathbb{R}$.

6.3.2 Classe d'équivalence

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E et x un élément de E .

Définition 6.10. On appelle **classe d'équivalence** (modulo $\mathcal{R}$) de x l'ensemble noté $\mathcal{C}_x$ ou $\bar{x}$ ou encore $\dot{x}$, défini par

$$\mathcal{C}_x = \{y \in E, x \mathcal{R} y\}.$$

Exemple 6.11.

Donner les classes d'équivalence des relations d'équivalence de l'exemple 6.8.

Proposition 6.12. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E .

1. $(\forall x \in E)(x \in \mathcal{C}_x)$. En particulier, $\mathcal{C}_x \neq \emptyset$.
2. $(\forall (x, y) \in E^2)(x\mathcal{R}y \iff \mathcal{C}_x = \mathcal{C}_y \iff \mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y \neq \emptyset)$.

Démonstration Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E .

1. Comme $\mathcal{R}$ est réflexive, on sait que $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$ donc $x \in \mathcal{C}_x$ par définition. Ainsi,

$$(\forall x \in E)(x \in \mathcal{C}_x)$$

En particulier, $\mathcal{C}_x \neq \emptyset$.

2. Soient $(x, y) \in E^2$.

- i. Supposons que $x\mathcal{R}y$ et montrons que $\mathcal{C}_x = \mathcal{C}_y$ par double inclusion.

Soit $z \in \mathcal{C}_x$. Alors $x\mathcal{R}z$. Or $x\mathcal{R}y$ et $\mathcal{R}$ est symétrique et transitive. Donc $z\mathcal{R}y$ et $z \in \mathcal{C}_y$. On a donc démontré $\forall z \in E, z \in \mathcal{C}_x \Rightarrow z \in \mathcal{C}_y$. Donc $\mathcal{C}_x \subset \mathcal{C}_y$ par définition. Les rôles de x et de y étant parfaitement symétriques, on peut refaire le raisonnement ci-dessus en remplaçant x par y et on obtient $\mathcal{C}_y \subset \mathcal{C}_x$. Finalement, $\mathcal{C}_x = \mathcal{C}_y$.

- ii. Supposons que $\mathcal{C}_x = \mathcal{C}_y$ et montrons que $\mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y \neq \emptyset$.

Si $\mathcal{C}_x = \mathcal{C}_y$ alors $\mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y = \mathcal{C}_x = \mathcal{C}_y$. Or d'après 1., $\mathcal{C}_x \neq \emptyset$ donc $\mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y \neq \emptyset$.

- iii. Supposons que $\mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y \neq \emptyset$ et montrons que $x\mathcal{R}y$.

Comme l'intersection des deux classes d'équivalence est non vide, il existe un élément z appartenant à l'une et à l'autre. Ainsi, $z\mathcal{R}x$ et $z\mathcal{R}y$. La relation $\mathcal{R}$ étant symétrique et transitive, on a bien $x\mathcal{R}y$.

Ainsi, on a démontré trois implications successives. La notion d'implication étant transitive (voir théorème 3.28), on a bien démontré les deux équivalences désirées.

◇

6.3.3 Ensemble quotient

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E .

Définition 6.13. On appelle **ensemble quotient** de E par $\mathcal{R}$ l'ensemble noté $E/\mathcal{R}$ formé des classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$ soit

$$E/\mathcal{R} = \{\mathcal{C}_x, x \in E\}.$$

Exemple 6.14.

Donner l'ensemble quotient associé aux relations d'équivalence de l'exemple 6.8.

Théorème 6.15. Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E alors $E/\mathcal{R}$ est une partition de E .

Démonstration Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E .

Montrons que $E/\mathcal{R} = \{\mathcal{C}_x, x \in E\}$ est une partition de E .

- i. $\forall x \in E, \mathcal{C}_x \neq \emptyset$ d'après la proposition 6.12.
- ii. $\forall (x, y) \in E^2, \mathcal{C}_x \neq \mathcal{C}_y \Rightarrow \mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y = \emptyset$ par contraposée de la proposition 6.12.
- iii. Toute classe d'équivalence est incluse dans E donc leur union aussi et $E/\mathcal{R} \subset E$.
Réciproquement, tout élément x de E est inclus dans sa classe d'équivalence $\mathcal{C}_x$ par la proposition 6.12 et $x \in \mathcal{C}_x \subset E/\mathcal{R}$. Ainsi, $E \subset E/\mathcal{R}$. On a montré deux inclusions et ainsi l'égalité désirée $E/\mathcal{R} = E$.

On a bien démontré les trois conditions pour que $E/\mathcal{R}$ forme une partition de E . $\diamond$

Réciproquement, le théorème suivant indique qu'à toute partition de E on peut associer une relation d'équivalence sur E .

Théorème 6.16. *Si Π est une partition de E alors il existe $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E telle que $\Pi = E/\mathcal{R}$.*

Démonstration On définit la relation $\mathcal{R}$ par

$$(\forall (x, y) \in E^2)(x\mathcal{R}y \iff (\exists A \in \Pi)(x \in A \text{ et } y \in A)).$$

On vérifie ensuite que $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique, et transitive. D'autre part, en montrant que

$$(\forall x \in E)(\forall A \in \Pi)(x \in A \implies \mathcal{C}_x = A),$$

on vérifie que $\Pi = E/\mathcal{R}$. $\diamond$

Remarque 6.17. *On peut interpréter la plupart des ensembles usuels comme des ensembles quotient. C'est le cas par exemple du corps $\mathbb{Q}$ ou de $K(x)$ le corps des fonctions rationnelles.*

Exemple 6.18. *Soit $E = \mathbb{Z}$, p un nombre premier et $\mathcal{R}$ la relation binaire sur E définie par*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, \quad x\mathcal{R}y \iff x - y \text{ est divisible par } p$$

Montrer que $\mathcal{R}$ définit bien une relation d'équivalence sur E . Alors son ensemble quotient $E/\mathcal{R}$ encore noté $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps. Il peut être représenté par $\{\dot{0}, \dot{1}, \dots, \dot{p-1}\}$ où $\dot{x}$ est la classe d'équivalence de x , c'est-à-dire tous les entiers relatifs dont le reste de la division euclidienne par p donne x . Reasonner dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ consiste à raisonner en base p . C'est très utilisé notamment en cryptographie, l'art de coder les informations...

6.4 Relation d'ordre

6.4.1 Définitions

Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E .

Définition 6.19. *La relation binaire $\mathcal{R}$ est une **relation d'ordre** si elle est :*

1. *réflexive,*
2. *antisymétrique,*
3. *transitive.*

Exemple 6.20.

Montrer que, dans les deux exemples suivants, $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E :

1. $E = \mathbb{R}$ et $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2)(x\mathcal{R}y \iff x \leq y)$.
2. $E = \mathcal{P}(X)$ où X est un ensemble non vide et

$$(\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(X))^2)(A\mathcal{R}B \iff A \subset B).$$

Remarque 6.21. La notion de relation d'ordre est une généralisation formelle de la notion d'inégalité dans $\mathbb{R}$. C'est pourquoi, quand il n'y a pas de risque de confusion, il arrive qu'elle soit notée " $\leq$ " au lieu de $\mathcal{R}$.

Définition 6.22. Un ensemble non vide E est dit **ordonné** s'il est muni d'une relation d'ordre $\mathcal{R}$. On note alors cet ensemble ordonné $(E, \mathcal{R})$.

Exemple 6.23. $(\mathbb{R}, \leq)$ et $(\mathcal{P}(X), \subset)$ sont des ensembles ordonnés

Définition 6.24. Soit $(E, \mathcal{R})$ un ensemble ordonné.

1. Deux éléments x et y de E sont dits **comparables** si $x\mathcal{R}y$ OU $y\mathcal{R}x$.
2. La relation $\mathcal{R}$ est **d'ordre total** si tous les éléments de E sont comparables :

$$(\forall (x, y) \in E^2)(x\mathcal{R}y \text{ OU } y\mathcal{R}x).$$

3. Elle est **d'ordre partiel** dans le cas contraire :

$$(\exists (x, y) \in E^2)(\text{NON}(x\mathcal{R}y) \text{ ET } \text{NON}(y\mathcal{R}x)).$$

Exemple 6.25. Les relations d'ordre définies dans l'exemple 6.20 sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{P}(X)$ sont-elles des relations d'ordre total ou partiel ?

6.4.2 Plus petit élément - Plus grand élément

Soit $(E, \mathcal{R})$ un ensemble ordonné.

Définition 6.26. On considère $m \in E$ et $M \in E$.

1. m est appelé **plus petit élément** de E si $(\forall x \in E)(m\mathcal{R}x)$.
2. M est appelé **plus grand élément** de E si $(\forall x \in E)(x\mathcal{R}M)$.

Exemple 6.27. Déterminer, s'ils existent, les plus petits et plus grands éléments de $(\mathbb{R}, \leq)$ et de $(\mathcal{P}(X), \subset)$.

Proposition 6.28. Soit $(E, \mathcal{R})$ un ensemble ordonné. Lorsqu'il existe, le plus petit élément (respectivement le plus grand) est unique.

Démonstration Raisonnons par l'absurde. Si $(E, \mathcal{R})$ admet deux plus petits éléments distincts m_1 et m_2 alors

$$\forall x \in E, \quad m_1\mathcal{R}x \text{ ET } m_2\mathcal{R}x$$

En particulier, pour $x = m_1$ on obtient $m_2\mathcal{R}m_1$ et en choisissant $x = m_2$, on a $m_1\mathcal{R}m_2$. $\mathcal{R}$ étant antisymétrique, on a $m_1 = m_2$. C'est absurde car nous les avons supposé distincts. Ainsi, un plus petit élément s'il existe est unique. La démonstration est bien sûr identique pour le plus grand élément. $\diamond$

6.4.3 Minorant - Majorant

Soit $(E, \mathcal{R})$ un ensemble ordonné. Soit F une partie non vide de E .

Définition 6.29. On considère $m \in E$ et $M \in E$.

1. m est un **minorant** de F dans E si $(\forall x \in F)(m \mathcal{R} x)$.
2. M est un **majorant** de F dans E si $(\forall x \in F)(x \mathcal{R} M)$.
3. La partie F est **minorée** dans E si il existe au moins un minorant.
4. La partie F est **majorée** dans E si il existe au moins un majorant.
5. La partie F est **bornée** dans E si elle est minorée et majorée.

Exemple 6.30.

1. On considère dans $(\mathbb{R}, \leq)$ la partie F définie par $F =]-3, -1]$. Donner des majorants et des minorants de F . La partie F admet-elle un plus petit (respectivement plus grand) élément ?
2. Soit $X = \{1, 2, 3, 4\}$. On considère dans $(\mathcal{P}(X), \subset)$ la partie F définie par $F = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$. Donner des majorants et des minorants de F . La partie F admet-elle un plus petit (respectivement plus grand) élément ?

Définition 6.31.

- Le plus petit élément de F , si il existe, est un minorant de F . On le note $m = \min F$ et cela signifie :

$$m \in F \text{ et } (\forall x \in F)(m \mathcal{R} x).$$

- Le plus grand élément de F , si il existe, est un majorant de F . On le note $M = \max F$ et cela signifie :

$$M \in F \text{ et } (\forall x \in F)(x \mathcal{R} M).$$

6.4.4 Borne inférieure - Borne supérieure

Soit $(E, \mathcal{R})$ un ensemble ordonné. Soit F une partie non vide de E . On note $M(F)$ l'ensemble des majorants de F et $m(F)$ l'ensemble des minorants de F .

Définition 6.32.

1. On appelle **borne inférieure** et on note $\inf F$ le plus grand élément de $m(F)$.
2. On appelle **borne supérieure** et on note $\sup F$ le plus petit élément de $M(F)$.

Exemple 6.33.

Déterminer les bornes inférieures et supérieures des parties F de l'exemple 6.30.

Proposition 6.34. (admise)

- Si $\inf F$ (respectivement $\sup F$) existe, il est unique.
- Si $\inf F \in F$ alors $\inf F = \min F$.
- De même, si $\sup F \in F$ alors $\sup F = \max F$.

6.5 Propriétés de l'ensemble des réels

Il existe plusieurs constructions de l'ensemble $\mathbb{R}$. L'une d'elle part de la constatation suivante :

Proposition 6.35. *On considère, dans $\mathbb{Q}$ ordonné par la relation usuelle, $\leq$, l'ensemble X défini par $X = \{x \in \mathbb{Q}, x > 0 \text{ et } x^2 \leq 2\}$. Alors X n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.*

Démonstration Supposons que la borne supérieure existe et notons $a = \sup X \in \mathbb{Q}$. Nous avons déjà vu dans l'exemple 4.15 que $x^2 = 2$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{Q}$ donc $a^2 \neq 2$. Supposons $a^2 > 2$ et posons $\varepsilon = a^2 - 2 > 0$. Pour tout rationnel h , nous avons

$$(a - h)^2 = a^2 - 2ah + h^2 = 2 + \varepsilon - 2ah + h^2.$$

En prenant $h = \min\left(\frac{\varepsilon}{2a}, a\right)$ avec $h > 0$ et $h \in \mathbb{Q}$ on obtient pour tout $x \in X$,

$$(a - h)^2 = 2 + \frac{\varepsilon^2}{4a^2} > 2 > x^2$$

donc $a - h > x > 0$ ce qui contredit le fait que a est le plus petit des majorants de X .

Supposons maintenant $a^2 < 2$ et posons $\varepsilon = 2 - a^2 > 0$.

Pour tout rationnel $h \in [0, 1]$, nous avons $0 < h^2 \leq h$ et

$$(a + h)^2 = a^2 + 2ah + h^2 = 2 - \varepsilon + 2ah + h^2 \leq 2 - \varepsilon + 2ah + h = 2 - \varepsilon + (2a + 1)h.$$

En prenant $h = \min\left(\frac{\varepsilon}{2a + 1}, 1\right)$, on obtient que $(a + h)^2 \leq 2$ donc $a + h \in X$ avec $a + h > a$ ce qui contredit le fait que a est un majorant de X . Finalement, a n'existe pas. $\diamond$

Pour remédier à ce problème, on introduit $\mathbb{R}$, l'ensemble des réels qui contient l'ensemble $\mathbb{Q}$ et dans lequel toute partie non vide et majorée possède une borne supérieure.

Proposition 6.36. *$\mathbb{R}$ est un corps commutatif totalement ordonné, archimédien et vérifiant la propriété de la borne supérieure.*

Expliquons un à un les termes de cette proposition.

$\mathbb{R}$ est un **corps commutatif** signifie que : $\mathbb{R}$ est muni de deux lois notées $+$ et $\times$ ayant les propriétés suivantes :

1. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a + b \in \mathbb{R} \text{ et } a \times b \in \mathbb{R}$ (lois internes)
2. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a + b = b + a \text{ et } a \times b = b \times a$ (lois commutatives)
3. $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, (a + b) + c = a + (b + c) \text{ et } (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ (lois associatives)
4. $\forall a \in \mathbb{R}, a + 0 = a \text{ et } a \times 1 = a$ (existence d'un neutre)
5. $\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}, a + b = 0 \text{ et } \forall a \in \mathbb{R}^*, \exists b \in \mathbb{R}^*, a \times b = 1$ (existence d'un symétrique pour a)
6. $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ ($\times$ est distributive par rapport à $+$).

$\mathbb{R}$ est **totalelement ordonné** signifie que la relation d'ordre " $\leq$ " est une relation d'ordre total. De plus,

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \leq y \implies x + z \leq y + z \text{ et } (x \leq y \text{ et } 0 \leq z) \implies x \times z \leq y \times z.$$

$\mathbb{R}$ est **archimédien** signifie qu'il vérifie l'axiome d'Archimède :

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})(x < n).$$

$\mathbb{R}$ vérifie la **propriété de la borne supérieure** signifie que tout ensemble non vide et majoré admet une borne supérieure ; ce qui se caractérise par :

Si X est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ alors $a = \sup X$ donc

$$(\forall x \in X)(x \leq a) \text{ et } (\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in X)(x > a - \varepsilon).$$

En particulier, en posant $-X = \{x \in \mathbb{R}, -x \in X\}$, on voit que $\mathbb{R}$ vérifie la **propriété de la borne inférieure**, c'est-à-dire que tout ensemble non vide et minoré admet une borne inférieure ce qui, avec les notations précédentes et $b = \inf X$, se caractérise par :

$$(\forall x \in X)(b \leq x) \text{ et } (\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in X)(x < b + \varepsilon).$$

Test d'assimilation numéro 4

1. Construire le graphe d'une relation binaire définie sur l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4\}$.
2. Même question avec une relation binaire réflexive, une relation binaire symétrique puis antisymétrique et enfin transitive. Rappelez à chaque fois la définition précise.
3. Une relation binaire peut-elle être à la fois une relation d'équivalence et d'ordre ?
4. Rappelez la définition d'une classe d'équivalence. Peut-elle être vide ? réduite à un point ? égale à l'ensemble E tout entier ? Si oui, donner un exemple de relation d'équivalence pour lequel cela se produit.
5. Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur $\mathbb{C}$ par

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad z\mathcal{R}z' \iff |z| = |z'|$$

Montrer que c'est une relation d'équivalence sur $\mathbb{C}$. Donner les classes d'équivalence et l'ensemble quotient. De quoi est-il une partition ?

6. Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ par

$$\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4, \quad (a, b)\mathcal{R}(c, d) \iff ad - bc = 0$$

Montrer que c'est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Donner les classes d'équivalence et l'ensemble quotient. Avec quel ensemble connu est-il en bijection ?

7. Soit l'ensemble $(\mathbb{R}, \leq)$. Montrer que c'est un ensemble totalement ordonné (c'est-à-dire un ensemble ordonné muni d'une relation d'ordre total).
Soit $X = \{-3, 3, 5 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$. X admet-il un plus petit élément, un plus grand élément, une borne supérieure, une borne inférieure ?
8. Même question avec $X =] - \infty, 0[\cup \{\frac{2}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$.
9. Même question avec $X = \mathbb{N}$.
10. Soit $(E, \mathcal{R})$ un ensemble ordonné. Démontrer que, s'il existe, le plus grand élément est unique.
11. Que signifie archimédien ?

Chapitre 7

Fonctions-Applications

7.1 Généralités

Soient E et F deux ensembles.

Définition 7.1. Une **fonction** f de E vers F (ou de E dans F) est une relation de E vers F associée à un graphe G_f telle que pour tout x dans E , il existe au plus un y dans F tel que (x, y) appartiennent à G_f . On caractérise alors les couples $(x, y) \in G_f$ par $y = f(x)$ et on définit les fonctions de la façon suivante :

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto y = f(x). \end{aligned}$$

E s'appelle l'ensemble **de départ**, F l'ensemble **d'arrivée**, y s'appelle **l'image** de x par f et x est **un antécédent** de y par f .

Définition 7.2. On appelle **domaine de définition** de f l'ensemble D_f constitué des x qui ont une image par f :

$$x \in D_f \iff x \in E \text{ et } \exists y \in F \text{ tel que } y = f(x).$$

Dans le cas où $D_f = E$, f s'appelle **une application** de E vers F . Ainsi, f est une application de E vers F si et seulement si

$$\forall x \in E, \quad \exists ! y \in F, \mid y = f(x)$$

L'ensemble des applications de E vers F est noté F^E ou $\mathcal{F}(E, F)$.

Définition 7.3. On appelle **application identité** de E l'application notée Id_E définie par

$$\begin{aligned} \text{Id}_E : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto x = \text{Id}_E(x). \end{aligned}$$

Définition 7.4. Deux applications sont **égales** si elles ont le même ensemble de départ, le même ensemble d'arrivée et le même graphe.

Exemple 7.5. Les applications

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

ne sont pas égales.

7.1.1 Restriction et prolongement d'une application

Soient E et F deux ensembles. On considère A, B et C des parties de E telles que $A \subset B \subset C$ et f une application de B vers F .

Définition 7.6. On appelle **restriction** de f à A l'application notée $f|_A$ définie pour tout x dans A par $f|_A(x) = f(x)$ soit :

$$\begin{array}{ccc} f|_A : A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & y = f(x). \end{array}$$

Exemple 7.7. Considérons les applications

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} h : \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2. \end{array}$$

L'application h est la restriction de f à $\mathbb{R}_+$. On peut donc écrire $h = f|_{\mathbb{R}_+}$.

Définition 7.8. On appelle **prolongement** de f à C toute application $\hat{f}$ définie sur C et telle que $\hat{f}|_B = f$.

Exemple 7.9. Soit

$$\begin{array}{ccc} f_1 : \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\sin x}{x}. \end{array}$$

Les applications

$$\begin{array}{ccc} f_2 : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_2(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 37 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} f_3 : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_3(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

sont des prolongements de f_1 à $\mathbb{R}$.

Remarque 7.10. Si f , A et C sont donnés, il existe une unique restriction de f à A alors qu'il existe plusieurs prolongements de f à C .

7.1.2 Image directe, image réciproque d'un sous-ensemble

Soit $A \subset E$, $B \subset F$ et f une application de E dans F .

Définition 7.11.

1. On appelle **image directe** de A par f le sous-ensemble de F noté $f(A)$ et défini par

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} = \{y \in F, \exists x \in A, y = f(x)\} \subset F.$$

En particulier, $y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A, y = f(x)$.

2. L'ensemble $f(E)$, l'ensemble des images de E , est souvent noté $\text{Im } f$.
3. On appelle **image réciproque** de B par f le sous-ensemble de E noté $f^{-1}(B)$ et défini par

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\} \subset E.$$

En particulier, $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$.

Définition 7.12. L'ensemble A est **stable** par f si $f(A) \subset A$.

Exemple 7.13. On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2. \end{aligned}$$

1. Déterminer $\text{Im } f$ et les ensembles $f(A)$ lorsque $A = [1, 2[$, $A = [-1, 3]$, $A = [-1, 1]$ et $A = \{-2\}$. Préciser lesquels de ces ensembles sont stables par f .
2. Déterminer les ensembles $f^{-1}(B)$ lorsque $B =]3, 9]$, $B = [-2, 1]$, $B = \{4\}$ et $B = \{-8\}$.
3. Déterminer $f(f^{-1}([-2, 1]))$ et $f^{-1}(f(\{2\}))$.

Proposition 7.14. Soient E et F deux ensembles et f une application de E vers F . On note A et A' des sous-ensembles de E , B et B' des sous-ensembles de F . Nous avons les propriétés suivantes :

1. $f(\emptyset) = \emptyset$ et $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.
2. $A \neq \emptyset \Rightarrow f(A) \neq \emptyset$ mais l'implication $(B \neq \emptyset \Rightarrow f^{-1}(B) \neq \emptyset)$ est fausse.
3. $A \subset A' \Rightarrow f(A) \subset f(A')$ et $B \subset B' \Rightarrow f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.
4. $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$.
5. $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$.
6. $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.
7. $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$.
8. $A \subset f^{-1}(f(A))$
9. $f(f^{-1}(B)) \subset B$
10. $f^{-1}(C_F B) = C_E f^{-1}(B)$

Démonstration Les assertions 4. 5. et 8. à 10. seront démontrées en TD. Voyons les autres maintenant.

1. Par définition, $f(\emptyset)$ est l'ensemble des images $f(x)$ pour $x \in \emptyset$. Ainsi, $f(\emptyset) = \emptyset$. De même, $f^{-1}(\emptyset)$ est l'ensemble des $x \in E$ dont les images $f(x)$ appartiennent au vide. Donc $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.
2. Si $A \neq \emptyset$ alors il existe $x \in A$ et $f(x) \in f(A)$. Donc $f(A) \neq \emptyset$. On a bien montré l'implication désirée. Par contre, si $B = \{-8\}$ dans l'exemple 7.13, $B \neq \emptyset$ et pourtant $f^{-1}(B) = \emptyset$. On a bien nié l'implication $B \neq \emptyset \Rightarrow f^{-1}(B) \neq \emptyset$.
3. Soient A et A' deux parties de E telles que $A \subset A'$. Montrons que $f(A) \subset f(A')$.
Soit $y \in f(A)$. Par définition, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Or $A \subset A'$ donc $x \in A'$ et $y = f(x)$. Ainsi, $y \in f(A')$.
On a bien montré que $\forall y \in F, y \in f(A) \Rightarrow y \in f(A')$, donc que $f(A) \subset f(A')$ par définition de l'inclusion.
De même, si $B \subset B'$, soit $x \in f^{-1}(B)$. Alors $f(x) \in B$. Or $B \subset B'$ donc $f(x) \in B'$ et $x \in f^{-1}(B')$. On a bien montré l'inclusion $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.
6. Montrons que $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.
Soit $x \in f^{-1}(B \cap B')$. On a par équivalence

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B \cap B') &\Leftrightarrow f(x) \in B \cap B' \Leftrightarrow f(x) \in B \text{ ET } f(x) \in B' \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B) \text{ ET } x \in f^{-1}(B') \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B') \end{aligned}$$

Comme on a raisonné par équivalence, on a directement montré l'égalité entre les deux ensembles $f^{-1}(B \cap B')$ et $f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.

7. Il suffit de réécrire la démonstration du point 6. en remplaçant les ET par des OU.

◇

Attention, il est important de comprendre (à l'aide des démonstrations) que les résultats sur l'image directe et sur l'image réciproque ne sont pas les mêmes !

7.1.3 Composition

Soient E, F et G trois ensembles. On considère f une application de E vers F et g une application de F vers G .

Définition 7.15. On appelle **composée** des applications f et g l'application de E vers G , notée $g \circ f$ et définie par

$$\forall x \in E, g \circ f(x) = g[f(x)].$$

Exemple 7.16. Soit les applications f et g définies par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} & g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} & \text{et} & x \longmapsto g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$.

Proposition 7.17. Soient des ensembles E, F, G et H . On considère les applications f, g et h définies respectivement de E vers F , de F vers G et de G vers H .

1. La composition des applications est associative : $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
2. Si $G = E$ alors on peut définir $g \circ f$ et $f \circ g$ mais ces applications ne sont pas égales en général.
3. $f \circ \text{Id}_E = \text{Id}_F \circ f = f$.

Démonstration

1. Les applications $h \circ (g \circ f)$ et $(h \circ g) \circ f$ ont même ensemble de départ E et même ensemble d'arrivée H . De plus, pour tout $x \in E$, on a

$$h \circ (g \circ f)(x) = h[g \circ f(x)] = h[g[f(x)]]$$

et

$$(h \circ g) \circ f(x) = (h \circ g)[f(x)] = h[g[f(x)]].$$

Les deux applications sont donc égales et la composition des applications est bien associative.

2. Dans le cas $G = E$, les deux applications $g \circ f$ et $f \circ g$ ont même ensemble de départ et d'arrivée E , mais elles ne sont pas nécessairement égales, l'exemple 7.16 en étant une preuve.
3. Les trois applications $f \circ \text{Id}_E$, $\text{Id}_F \circ f$ et f ont même ensemble de départ E , même ensemble d'arrivée F et prennent la même valeur $f(x)$ en tout point x de E . Elles sont donc égales.

◇

7.2 Injection, surjection, bijection

7.2.1 Définitions

Soient E et F deux ensembles et f une application de E vers F

Définition 7.18. L'application f est **injective** si et seulement si

$$(\forall (x, x') \in E^2)(f(x) = f(x') \implies x = x').$$

En utilisant la contraposée, il est équivalent d'écrire que f est injective si et seulement si

$$(\forall (x, x') \in E^2)(x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')).$$

Autrement dit, une application est injective si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée a au plus un antécédent par f .

Exemple 7.19. Déterminer, parmi les applications f, g et h des exemples 7.5 et 7.7, lesquelles sont injectives.

Définition 7.20. L'application f est **surjective** si et seulement si

$$(\forall y \in F)(\exists x \in E)(y = f(x)).$$

Autrement dit, une application est surjective si tout élément de l'ensemble d'arrivée a au moins un antécédent par f .

Exemple 7.21. Déterminer, parmi les applications f , g et h des exemples 7.5 et 7.7, lesquelles sont surjectives.

Définition 7.22. L'application f est **bijjective** si et seulement si elle est injective ET surjective, c'est-à-dire,

$$(\forall y \in F)(\exists ! x \in E)(y = f(x)).$$

Autrement dit, une application est bijective si tout élément de l'ensemble d'arrivée a exactement un antécédent par f .

Exemple 7.23. Construire, à partir des applications f , g et h des exemples 7.5 et 7.7, une application bijective.

Définition 7.24. Soit f est une application bijective de E vers F . On appelle **application réciproque** de f , l'application de F vers E notée f^{-1} définie par

$$\begin{aligned} f^{-1} : F &\longrightarrow E \\ y &\longmapsto x = f^{-1}(y) \quad \text{où } x \text{ est l'unique antécédent de } y \text{ par } f. \end{aligned}$$

Exemple 7.25.

1. L'application $\ln$ définie de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$ est la réciproque de l'application $\exp$ définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$.
2. L'application Arccos définie de $[-1, 1]$ vers $[0, \pi]$ est la réciproque de la restriction de la fonction $\cos$ à l'ensemble $[0, \pi]$.

Remarque 7.26. ATTENTION! Il ne faut pas confondre l'application réciproque f^{-1} d'une application bijective f avec $f^{-1}(B)$, l'image réciproque d'un ensemble B (cf définition 7.11) qui est parfaitement définie, même si f n'est pas bijective.

7.2.2 Propriétés

Proposition 7.27. Soit E et F , deux ensembles et f une application de E vers F . On note A et A' deux sous-ensembles de E , B et B' deux sous-ensembles de F . Nous avons les propriétés suivantes :

1. La composée de deux applications injectives est injective.
2. La composée de deux applications surjectives est surjective.
3. La composée de deux applications bijectives est bijective.
4. f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.

5. Si f est injective alors $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$.
6. Si f est injective alors $A = f^{-1}(f(A))$.
7. Si f est surjective alors $f(f^{-1}(B)) = B$.

Démonstration Les assertions 2. 3. et 5. à 7. seront démontrées en TD. Voyons les autres maintenant.

1. Soit f une application injective de E vers F et g une application injective de F vers G . Montrons que $g \circ f$ est une application injective de E vers G .
Soient $(x, x') \in E^2$ tels que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. Par définition de la composition, $g[f(x)] = g[f(x')]$. Comme g est injective, $f(x) = f(x')$. Et comme f est injective, $x = x'$. On a bien montré que

$$(\forall (x, x') \in E^2)(g \circ f(x) = g \circ f(x') \implies x = x')$$

donc que $g \circ f$ est injective. La composition de deux applications injectives est bien injective.

4. On doit démontrer une équivalence. Montrons donc une double implication :
 - Supposons f surjective et montrons que $f(E) = F$. On a toujours $f(E) \subset F$ par définition. Pour l'autre inclusion, considérons $y \in F$. Comme f est surjective, il existe un antécédant $x \in E$ à y tel que $y = f(x)$. Ainsi, $y \in f(E)$ et $F \subset f(E)$. Par double inclusion, nous avons bien montré l'égalité $f(E) = F$.
 - Réciproquement, supposons que $f(E) = F$ et montrons que f est surjective. Soit $y \in F$. Comme $F = f(E)$, $y \in f(E)$. Or $f(E)$ est l'ensemble des images par f d'éléments de E donc il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et f est surjective.
 Nous avons bien démontré l'équivalence entre l'assertion " f est surjective" et celle " $f(E) = F$ ". Cette assertion est primordiale pour l'étude des applications linéaires en algèbre linéaire.

◇

Proposition 7.28. On considère f et g des applications bijectives définies respectivement de E vers F et de F vers G . On note f^{-1} (respectivement g^{-1}) l'application réciproque de f (respectivement de g). Alors,

1. $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$.
2. L'application f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.
3. $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Démonstration

1. Les deux applications $f \circ f^{-1}$ et Id_F ont même ensemble de départ F et d'arrivée F . De plus en tout point $y \in F$, elles ont la même image y .
En effet, $f \circ f^{-1}(y) = f(x) = y$ si x est l'unique antécédant de y par f (celui-ci existe et est unique car f est bijective). De même, on montre que $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$.

2. Soit f une application bijection. Posons $h = f^{-1}$ sa réciproque. Alors, h est une application de F vers E . Montrons qu'elle est bijective.
 Soient $(y, y') \in F^2$ tels que $h(y) = h(y')$. Alors par composition, $f \circ h(y) = f \circ h(y')$.
 Or par 1. ci-dessus, $f \circ h = \text{Id}_F$ donc $y = y'$ et h est injective.
 Soit $x \in E$. Alors $f(x) \in F$ et $h(f(x)) = h \circ f(x) = x$ donc $f(x)$ est un antécédant par h de x . On a montré que h est surjective.
 Etant injective et surjective, h est bijective. De plus, on montre aisément qu'elle coïncide avec f^{-1} . Ainsi, l'application f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.
3. Si f et g sont deux applications bijectives de E vers F et de F vers G respectivement alors leur composée $g \circ f$ est bijective de E vers G (cf proposition 7.27 point 3). De plus, les deux applications $(g \circ f)^{-1}$ et $f^{-1} \circ g^{-1}$ ont même ensemble de départ G et même ensemble d'arrivée E . Enfin, en tout point $z \in G$, si on note y l'unique antécédant de z par g et x l'unique antécédant de y par f , on a $(g \circ f)^{-1}(z) = x$ car $g \circ f(x) = g(y) = z$ et $f^{-1} \circ g^{-1}(z) = f^{-1}(y) = x$. Ces deux applications sont donc égales.

◇

Exemple 7.29. Déterminer les ensembles E, F, G et H tels que

$$\cos \circ \text{Arccos} = \text{Id}_E, \quad \text{Arccos} \circ \cos = \text{Id}_F, \quad \text{sh} \circ \text{Argsh} = \text{Id}_G \quad \text{et} \quad \text{Argsh} \circ \text{sh} = \text{Id}_H.$$

Proposition 7.30. Soit E et F deux ensembles. On considère f et g deux applications définies respectivement de E vers F et de F vers E .

1. Si $g \circ f = \text{Id}_E$ alors f est injective et g est surjective.
2. Si $g \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ g = \text{Id}_F$ alors f et g sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.

Démonstration

1. Supposons que $g \circ f = \text{Id}_E$ et montrons que f est injective.
 Soient $(x, x') \in E^2$ tels que $f(x) = f(x')$. Par composition on a $g \circ f(x) = g \circ f(x')$.
 Or $g \circ f = \text{Id}_E$ donc $x = x'$. On a bien montré l'injectivité de f .
 Montrons maintenant que g est surjective.
 Soit $x \in E$. Alors $f(x) \in F$ et $g(f(x)) = g \circ f(x) = \text{Id}_E(x) = x$. Ainsi $f(x)$ est un antécédant par g de x et g est surjective.
2. Supposons maintenant que $g \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ g = \text{Id}_F$. Alors par le raisonnement précédent, on montre que f est injective et g surjective par la première égalité. La deuxième conduit à la surjectivité de f et l'injectivité de g . Finalement, f et g sont bijectives. On montre aisément que les applications g et f^{-1} sont égales de F dans E puis en utilisant la proposition 7.28 point 2 que f et g^{-1} le sont aussi. Ainsi, f et g sont réciproques l'une de l'autre.

◇

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Proposition 7.31. *Soit E, F et G trois ensembles. On considère f et g deux applications définies respectivement de E vers F et de F vers G .*

1. *Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.*
2. *Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.*

Démonstration Cette démonstration sera vue en TD.

◇

Test d'assimilation numéro 5

1. Construire le graphe d'une application quelconque, d'une application injective, puis surjective et enfin bijective. On prendra soin de construire quatre graphes différents.
2. Construire le graphe d'une fonction qui n'est pas une application, d'une application non injective, puis non surjective et enfin non bijective. On prendra soin de construire quatre graphes différents.
3. Donner les définitions d'une application, d'une application injective, d'une application surjective, d'une application bijective.
4. Donner les négations des quatre définitions précédentes.
5. Soit f une application de E dans F . Soit A une partie de E et B une partie de F . Traduire $y \in f(A)$ et $x \in f^{-1}(B)$.
6. Trouver un exemple f, E, F, A et B tels que $f^{-1}(f(A)) \neq A$ et $f(f^{-1}(B)) \neq B$.
7. Trouver un exemple f, E, F, A et A' tels que $f(A \cap A') \neq f(A) \cap f(A')$.
8. Donner l'exemple d'une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui laisse stable tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$.
9. Donner un exemple f, g, E et F , différent de celui du cours, pour lequel $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bien définies mais différentes.
10. Soit f une application bijective de E dans F . On note h sa fonction réciproque de F dans E . Soit A une partie de E et B une partie de F . Montrer que $f^{-1}(B) = h(B)$ et que $h^{-1}(A) = f(A)$ où $f^{-1}(B)$ désigne l'image réciproque de B par f et $h(B)$ l'image directe de B par h . C'est cette égalité qui explique la notation ambiguë de l'image réciproque.

Chapitre 8

Ensembles finis - Dénombrément

Si n est un entier naturel, on note $\mathbb{N}_n = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ et $\mathbb{N}_n^* = \{1, 2, \dots, n\}$.

8.1 Ensembles finis, dénombrables, infinis non dénombrables

Soient E et F deux ensembles.

8.1.1 Définitions

Définition 8.1. Les ensembles E et F sont **équipotents** ou E est **équipotent** à F s'il existe une bijection de E vers F .

Lemme 8.2. Soit m et n deux entiers naturels non nuls. Si $\mathbb{N}_n^*$ et $\mathbb{N}_m^*$ sont équipotents alors $m = n$.

Démonstration Soit h une application bijective de $\mathbb{N}_n^*$ vers $\mathbb{N}_m^*$. Nous allons montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $m = n$.

Définition de l'assertion à démontrer : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $P(n)$ l'assertion $m = n$.

Initialisation : Pour $n = 1$, supposons que $m > 1$. Si $h(1) > 1$ alors $1 \in \mathbb{N}_m^*$ n'a pas d'antécédent par h bijective ce qui est absurde donc $h(1) = 1$ et alors c'est $2 \in \mathbb{N}_m^*$ qui n'a pas d'antécédent par h bijective. Finalement, on a bien $m = 1 = n$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie. Supposons dans un premier temps que $h(n+1) = m$. Alors l'application

$$\begin{aligned} \hat{h} : \mathbb{N}_n^* &\longrightarrow \mathbb{N}_{m-1}^* \\ p &\longmapsto h(p) \end{aligned}$$

est bijective donc par hypothèse de récurrence, $n = m - 1$ donc $n + 1 = m$ et la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Supposons maintenant que $h(n+1) = a \neq m$. Alors l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{N}_m^* &\longrightarrow \mathbb{N}_m^* \\ p &\longmapsto \varphi(p) = \begin{cases} p & \text{si } p \neq a \text{ et } p \neq m \\ m & \text{si } p = a \\ a & \text{si } p = m \end{cases} \end{aligned}$$

est bijective. Ainsi, l'application $\tilde{h} = \varphi \circ h$ est une bijection de $\mathbb{N}_{n+1}^*$ vers $\mathbb{N}_m^*$ et nous sommes ramené au cas précédent puisque $\tilde{h}(n+1) = \varphi(a) = m$. Par suite $n+1 = m$.

Conclusion : Par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier non nul n .

◇

Remarque 8.3. La réciproque de ce lemme est bien sûr vraie, si $m = n$ alors $\mathbb{N}_n^*$ et $\mathbb{N}_m^*$ sont égaux donc équipotents. L'implication évoquée dans le lemme est donc en fait une équivalence.

Définition 8.4. L'ensemble E est **fini** s'il est vide ou s'il existe un entier naturel non nul n tel que E soit équipotent à $\mathbb{N}_n^*$. L'entier n est unique et s'appelle le **cardinal** de E : on note $n = \text{Card } E$. De plus, par convention $\text{Card } \emptyset = 0$.

Remarque 8.5. Le fait que l'entier naturel non nul n évoqué ci-dessus existe et soit unique est une conséquence directe du lemme 8.2.

Exemple 8.6. Soit un entier non nul n . Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- i. $\exists (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$ tels que $\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^{*2}, i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$ et $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
- ii. $\text{Card } E = n$

On pourra notamment considérer l'application φ qui à $i \in \mathbb{N}_n^*$ associe $x_i \in E$ et montrer qu'elle est injective et surjective.

Proposition 8.7. Soient E et F deux ensembles finis et f une application de E vers F . Si f est bijective alors $\text{Card } E = \text{Card } F$.

Démonstration Soit $n = \text{Card } E$ et $p = \text{Card } F$ avec n et p deux entiers naturels non nuls. Il existe par définition une bijection φ de E dans $\mathbb{N}_n^*$ et une autre ψ de F dans $\mathbb{N}_p^*$. Ainsi, $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est une application de $\mathbb{N}_n^*$ dans $\mathbb{N}_p^*$, bijective car composée d'applications bijectives (cf proposition 7.27). D'après le lemme 8.2, $n = p$. ◇

Définition 8.8.

1. L'ensemble E est **infini** s'il existe une injection de $\mathbb{N}$ vers E .
2. L'ensemble E est **infini dénombrable** ou **dénombrable** s'il est équipotent à $\mathbb{N}$.
3. L'ensemble E est **infini non dénombrable** s'il existe une injection non surjective de $\mathbb{N}$ vers E .

Exemple 8.9.

1. Montrer que l'ensemble des entiers pairs est dénombrable.
2. Montrer que l'ensemble des entiers relatifs est dénombrable.
3. Montrer que $E =]0, 1[$ et $F =]1, +\infty[$ sont équipotents. On admettra qu'ils sont infinis non dénombrables.

Proposition 8.10. Si E est dénombrable alors E est infini. La réciproque est fausse.

Démonstration Si E est dénombrable, il existe une bijection de $\mathbb{N}$ vers E , donc en particulier il existe une injection de $\mathbb{N}$ vers E et E est infini.

Pour montrer que la réciproque est fausse, nous allons montrer que $\mathbb{N}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ne sont pas équipotents. Il est clair que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est infini car l'application f définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ n &\longmapsto \{n\} \end{aligned}$$

est injective. Supposons de plus qu'il existe une application g surjective de $\mathbb{N}$ vers $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Alors pour tout entier n , $g(n)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$. Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ défini par $A = \{p \in \mathbb{N}, p \notin g(p)\}$.

Comme g est surjective, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $g(n_0) = A$.

-Premier cas : $n_0 \in A = g(n_0)$ donc $n_0 \in g(n_0)$ et $n_0 \notin g(n_0)$ puisque $n_0 \in A$.

-Second cas : $n_0 \notin A = g(n_0)$ donc $n_0 \notin g(n_0)$ et par suite $n_0 \in A$.

Les deux cas conduisent à une contradiction, c'est donc qu'il n'existe pas d'application surjective de $\mathbb{N}$ vers $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ donc $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable. $\diamond$

8.1.2 Cardinaux, union, intersection et produit

Lemme 8.11. Soit E un ensemble fini non vide et $x \in E$. Alors

$$\text{Card } E \setminus \{x\} = \text{Card } E - 1$$

Démonstration Si $E = \{x\}$ alors $\text{Card } (E \setminus \{x\}) = \text{Card } \emptyset = 0$ et $\text{Card } E - 1 = 0$. On a bien l'égalité désirée. Si maintenant $\text{Card } E = n > 1$, il existe une bijection φ de E dans $\mathbb{N}_n^*$ et on va construire une nouvelle bijection ψ de $E \setminus \{x\}$ dans $\mathbb{N}_{n-1}^*$. Soit donc ψ l'application définie par $\forall y \in E \setminus \{x\}, \psi(y) = \varphi(y)$ si $\varphi(y) \neq n$ et $\psi(y) = \varphi(x)$ sinon. On vérifie (à faire en exercice !) qu'elle est bijective de $E \setminus \{x\}$ dans $\mathbb{N}_{n-1}^*$. Ainsi, $\text{Card } E \setminus \{x\} = n - 1$. $\diamond$

Proposition 8.12. Soit E un ensemble fini.

1. Si $A \subset E$ alors A est un ensemble fini et $\text{Card } A \leq \text{Card } E$.
2. Si $A \subset E$ et $\text{Card } A = \text{Card } E$ alors $A = E$.

Démonstration

1. Montrons cette implication par récurrence sur le cardinal de E .

Définition de la propriété de récurrence : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ la proposition suivante : "Si $A \subset E$ et $\text{Card } E = n$ alors A est un ensemble fini et $\text{Card } A \leq n$ ".

Initialisation : Si $n = 0$, $E = \emptyset$ et la seule partie de E est $A = E = \emptyset$. Ainsi, $\text{Card } A = 0 \leq \text{Card } E$ et la propriété de récurrence est vérifiée au rang $n = 0$.

Hérédité : On suppose que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $P(n+1)$ est vraie. Soit donc E un ensemble fini de cardinal $n+1$ et $A \subset E$. Deux possibilités s'offrent à nous : soit $A = E$ et $\text{Card } A = n+1 \leq \text{Card } E$ et $P(n+1)$ est vraie, soit $A \neq E$ et il existe $x \in \complement_E A$. Alors $A \subset E \setminus \{x\}$. D'après le lemme 8.11, $\text{Card } E \setminus \{x\} = n+1-1 = n$ et on peut appliqué la propriété de récurrence à $A \subset E \setminus \{x\}$. Donc $\text{Card } A \leq n < n+1$. Ainsi $P(n+1)$ est encore vérifiée. On a bien montré que dans les deux cas la propriété de récurrence est héréditaire.

Conclusion : Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, si E est un ensemble fini de cardinal n et $A \subset E$ alors $\text{Card } A \leq n$ et la proposition est démontrée.

2. Soit E un ensemble fini et A une partie de E de même cardinal que E . Raisonnons par l'absurde : si $A \neq E$ alors il existe $x \in \complement_E A$ et $A \subset E \setminus \{x\}$. De même que précédemment, $\text{Card } A \leq \text{Card } E - 1 < \text{Card } E$. Ceci est absurde car contredit le fait que A et E soit de même cardinal. Donc $A = E$.

◇

Remarque 8.13. Attention de bien vérifier l'hypothèse $A \subset E$ dans la deuxième proposition car les ensembles $\{0, 1, 2, 3\}$ et $\{9, 8, 7, 6\}$ sont de même cardinal mais ne sont pas égaux !

Proposition 8.14. Soit E un ensemble fini.

1. Soit $A \subset E$ et $B \subset E$ tels que $A \cap B = \emptyset$ alors $\text{Card } (A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B$.
2. Soit $A \subset E$ et $B \subset E$ alors $\text{Card } (A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card } (A \cap B)$.
3. Soit $A \subset E$ alors $\text{Card } \complement_E A = \text{Card } E - \text{Card } A$
4. Si $\Pi = \{A_1, A_2, \dots, A_p\}$ est une partition de E alors $\text{Card } E = \sum_{i=1}^p \text{Card } A_i$.

Démonstration

1. On sait que E est un ensemble fini, A , B et $A \cup B$ sont des parties de E donc ce sont aussi des ensembles finis. Soit $m = \text{Card } A$ et $p = \text{Card } B$. Il existe donc une bijection φ de A dans $\mathbb{N}_m^*$ et une autre ψ de B dans $\mathbb{N}_p^*$. Construisons f de $A \cup B$ dans $\mathbb{N}_{m+p}^*$ par $f(x) = \varphi(x)$ si $x \in A$ et $f(x) = \psi(x) + m$ si $x \in B$. Alors on vérifie que f est une bijection (surjective par construction et injective car $A \cap B = \emptyset$) et $\text{Card } A \cup B = m + p$.
2. On sait que E est un ensemble fini, A , B , $A \cap B$ et $A \cup B$ sont des parties de E donc ce sont aussi des ensembles finis. On se ramène au cas précédent en écrivant $A \cup B = A \cup (B \cap \complement_E A)$ car $A \cap (B \cap \complement_E A) = A \cap \complement_E A \cap B = \emptyset$.

Ainsi, $\text{Card } A \cup B = \text{Card } A + \text{Card } (B \cap \complement_E A)$. De plus, $B = (B \cap A) \cup (B \cap \complement_E A)$ et $(B \cap A) \cap (B \cap \complement_E A) = B \cap A \cap \complement_E A = \emptyset$. Donc par le point précédent, on a encore $\text{Card } B = \text{Card } (B \cap A) + \text{Card } (B \cap \complement_E A)$. En combinant ces deux égalités, on obtient l'égalité désirée.

3. On sait que $(A, \complement_E A)$ forment une partition de E donc on peut appliquer le point 1. pour obtenir que $\text{Card } A + \text{Card } \complement_E A = \text{Card } E$.
4. On généralise le cas précédent par récurrence sur le nombre de parties dans la partition.

Définition de la propriété de récurrence : Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $P(p)$ la proposition : "Si $(A_i)_{i \in \mathbb{N}_p^*}$ est une partition de E à p parties alors $\text{Card } E = \sum_{i=1}^p \text{Card } A_i$ ".

Initialisation : Si $p = 1$, E est la seule partition de E à un seul sous-ensemble. Or $\text{Card } E = \text{Card } E$ et la propriété de récurrence est vérifiée au rang $p = 1$.

Hérédité : On suppose que $P(p)$ est vraie pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $P(p+1)$ est vraie. Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{N}_{p+1}^*}$ une partition de E à $p+1$ parties de E . Alors $(A_1, A_2, \dots, A_{p-1}, A_p \cup A_{p+1})$ est une partition de E à p parties. L'hypothèse de récurrence $P(p)$ s'applique et $\text{Card } E = \sum_{i=1}^{p-1} \text{Card } A_i + \text{Card } (A_p \cup A_{p+1})$. Or $A_p \cap A_{p+1} = \emptyset$ donc par le point 1., $\text{Card } (A_p \cup A_{p+1}) = \text{Card } A_p + \text{Card } A_{p+1}$. Ainsi $P(p+1)$ est encore vérifiée. On a bien montré que la propriété de récurrence est héréditaire.

Conclusion : Par le principe de récurrence, la proposition est démontrée pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

◇

Remarque 8.15. Les égalités précédentes peuvent se généraliser dans deux cas :

1. (Formule du crible) Si $(A_i)_{i=1 \dots p}$ est une famille de sous-ensembles de E alors

$$\text{Card } \left(\bigcup_{i=1}^p A_i \right) = \sum_{k=1}^p \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}_p^k} (-1)^{k+1} \text{Card } (A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

2. Si $(A_i)_{i=1 \dots p}$ est une famille de sous-ensembles de E deux à deux distincts (c'est-à-dire $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$) alors

$$\text{Card } \left(\bigcup_{i=1}^p A_i \right) = \sum_{i=1}^p \text{Card } A_i$$

Proposition 8.16. Soient E et F deux ensembles finis. Alors,

$$\text{Card } (E \times F) = \text{Card } E \text{ Card } F$$

Démonstration Soit $E = \{a_1, \dots, a_n\}$ où $n = \text{Card } E$ (cf exemple 8.6).

Alors $\{a_1\} \times F, \dots, \{a_n\} \times F$ est une partition de $E \times F$ à n parties de $E \times F$. D'après la proposition 8.14, $\text{Card } E \times F = \sum_{i=1}^n \text{Card } (\{a_i\} \times F)$. Or l'application f qui à $(a_i, b) \in \{a_i\} \times F$ associe $b \in F$ est une bijection. Donc $\text{Card } \{a_i\} \times F = \text{Card } F$ et $\text{Card } E \times F = n \text{Card } F = \text{Card } E \times \text{Card } F$. ◇

Exemple 8.17. Combien un village doit-il contenir d'habitants pour que deux personnes au moins aient les mêmes initiales ? On pourra commencer par compter combien d'initiales à deux lettres peuvent exister.

Remarque 8.18. De même que précédemment, cette formule se généralise facilement à plus de deux ensembles : Si $(E_i)_{i \in \mathbb{N}_n^*}$ est une famille de n ensembles alors

$$\text{Card} \prod_{i=1}^n E_i = \prod_{i=1}^n \text{Card } E_i$$

8.1.3 Cardinaux et application

Proposition 8.19. Soient E et F deux ensembles finis et f une application de E vers F .

1. $\text{Card } f(E) \leq \text{Card } E$.
2. Si f est injective alors $\text{Card } E \leq \text{Card } F$.
3. f injective $\iff \text{Card } f(E) = \text{Card } E$.
4. Si f est surjective alors $\text{Card } E \geq \text{Card } F$.
5. f surjective $\iff \text{Card } f(E) = \text{Card } F$.

Démonstration

1. On sait qu'une fonction f est une application si et seulement si tout élément de l'ensemble de départ $x \in E$ a exactement une image y dans l'ensemble d'arrivée. Deux images pouvant être confondues, on a donc $\text{Card } f(E) \leq \text{Card } E$.
2. Si f est injective alors l'application $\tilde{f}$ de E dans $f(E)$ définie pour tout x dans E par $\tilde{f}(x) = f(x)$ est bijective donc $\text{Card } E = \text{Card } f(E)$. Or $f(E) \subset F$ donc par la proposition 8.12, $\text{Card } f(E) \leq \text{Card } F$ et $\text{Card } E \leq \text{Card } F$.
3. L'implication directe vient d'être démontrée, occupons-nous de la réciproque en démontrant la contraposée ! Si f est non injective alors il existe $(x, x') \in E^2$ tels que $x \neq x'$ ET $f(x) = f(x')$. Ainsi, si $E = \{x_1, \dots, x_n\}$, $f(E) = \{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$ et $\text{Card } f(E) < \text{Card } E$. Ainsi $\text{Card } f(E) \neq \text{Card } E$. Ceci démontre bien la contraposée de la réciproque.
4. Supposons que f est surjective. Alors $f(E) = F$ et $\text{Card } f(E) = \text{Card } F$. Or $\text{Card } f(E) \leq \text{Card } E$ d'après le premier point. Ainsi, $\text{Card } E \geq \text{Card } F$.
5. L'implication directe vient d'être démontrée, occupons-nous de la réciproque. On doit montrer que $f(E) = F$. On sait par définition que $f(E) \subset F$. Or $\text{Card } f(E) = \text{Card } F$ par hypothèse donc $f(E) = F$ d'après la proposition 8.12. Ainsi, f est surjective.

◇

Théorème 8.20. Soit E et F deux ensembles finis de même cardinal et f une application de E vers F .

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective.}$$

Démonstration Supposons que f est une application de E dans F , deux ensembles finis de même cardinal. Alors

$$\begin{aligned} f \text{ injective} &\Leftrightarrow \text{Card } f(E) = \text{Card } E \text{ d'après la proposition 8.19 point 3.} \\ &\Leftrightarrow \text{Card } f(E) = \text{Card } F \text{ car } \text{Card } E = \text{Card } F \\ &\Leftrightarrow f \text{ surjective d'après la proposition 8.19 point 5.} \end{aligned}$$

D'autre part, comme f est bijective si et seulement si elle est injective et surjective, on a bien les deux équivalences demandées. $\diamond$

Remarque 8.21. *Attention de bien vérifier l'hypothèse "ensembles finis de même cardinal" car l'application*

$$\begin{aligned} h : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longmapsto 2n \end{aligned}$$

est injective mais non surjective.

8.2 Dénombrement

Le dénombrement consiste à déterminer le nombre d'éléments dans un ensemble fini. Nous allons donner quelques exemples et définir quelques notions d'analyse combinatoire.

8.2.1 Cardinaux et parties

Théorème 8.22. *Soit E et F deux ensembles finis. Si $\text{Card } E = p$ et $\text{Card } F = n$ alors*

$$\text{Card } F^E = n^p.$$

Ceci justifie la notation F^E pour l'ensemble des applications de E vers F .

Démonstration Soit $E = \{a_1, \dots, a_n\}$ un ensemble fini de cardinal n (cf exemple 8.6). On définit une application h de F^E dans le produit cartésien F^n par

$$\begin{aligned} h : F^E &\longrightarrow F^n \\ f &\longmapsto (f(a_1), \dots, f(a_n)) \end{aligned}$$

Montrons que c'est une bijection.

Si $h(f) = h(g)$ alors $(f(a_1), \dots, f(a_n)) = (g(a_1), \dots, g(a_n))$ et $\forall i \in \mathbb{N}_n^*, f(a_i) = g(a_i)$. Comme f et g sont deux applications de E dans F égales en tout point de E , elles sont égales. Ainsi, h est injective.

Soit $(b_1, \dots, b_n) \in F^n$. On construit l'application f de E dans F par $\forall i \in \mathbb{N}_n^*, f(a_i) = b_i$. Alors $h(f) = (b_1, \dots, b_n)$ et f est un antécédant de $(b_1, \dots, b_n)$ par h . Ainsi, h est surjective. Finalement, h est bijective de F^E dans F^n et par les propositions 8.7 et 8.16, $\text{Card } F^E = \text{Card } F^n = (\text{Card } F)^n$. $\diamond$

Corollaire 8.23. Soit E un ensemble fini. Si $\text{Card } E = p$ alors $\text{Card } \mathcal{P}(E) = 2^p$.

Démonstration Il existe plusieurs démonstrations de ce théorème, en voici une qui utilise la notion de fonction indicatrice.

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, on appelle fonction indicatrice de A , l'application 1_A définie de E dans $\{0, 1\}$ de la façon suivante :

$$\forall x \in E \quad 1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

On considère alors l'application Φ définie par :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \{0, 1\}^E \\ A &\longmapsto 1_A \end{aligned}$$

On montre que Φ est injective : Soit $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $\Phi(A) = \Phi(B)$ c'est-à-dire $1_A = 1_B$. Pour tout $x \in A$, $1_B(x) = 1_A(x) = 1$ donc $x \in B$ et $A \subset B$. De même on montre que $B \subset A$ et par suite on a $A = B$.

On montre ensuite que Φ est surjective : Soient $f \in \{0, 1\}^E$ et $A = \{x \in E, f(x) = 1\}$. On a alors $f = 1_A$. En effet, pour tout $x \in A$, $f(x) = 1 = 1_A(x)$ et pour tout $x \notin A$, $f(x) = 0 = 1_A(x)$.

Φ est donc une application bijective donc $\text{Card } \mathcal{P}(E) = \text{Card } \{0, 1\}^E = 2^p$. $\diamond$

Exemple 8.24. Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que

$$\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \text{Card } X = n2^{n-1}$$

On peut montrer facilement (à faire !) que l'application φ qui à $X \in \mathcal{P}(E)$ associe son complémentaire $\complement_E X \in \mathcal{P}(E)$ est une bijection. Ainsi,

$$S = \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \text{Card } X = \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \text{Card } \complement_E X$$

En additionnant ces deux sommes et sachant que $(X, \complement_E X)$ est une partition de E , on a

$$2S = \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \text{Card } (X \cup \complement_E X) = \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \text{Card } E = \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} n = n2^n$$

d'après le corollaire 8.23. En divisant par 2, on obtient la quantité désirée.

8.2.2 Arrangements

Théorème 8.25. Soit E et F deux ensembles finis tels que $\text{Card } E = p \leq n = \text{Card } F$.

Le nombre d'applications injectives de E vers F est : $\frac{n!}{(n-p)!}$.

Démonstration Notons $A_{n,p}$ le nombre d'applications injectives de E vers F . On raisonne par récurrence sur $p = \text{Card } E$.

Définition de la propriété de récurrence : Pour $p \in \mathbb{N}$, notons $P(p)$ l'assertion

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Initialisation : pour $p = 1$, il existe n applications de E vers F , elles sont toutes injectives donc $A_{n,1} = n = \frac{n!}{(n-1)!}$.

Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(p)$ est vraie et montrons que $P(p+1)$ est vraie. Soit E un ensemble de cardinal $p+1$ et $a \in E$.

Comme $\text{Card}(E \setminus \{a\}) = p$, l'hypothèse de récurrence assure que le nombre d'applications injectives de $E \setminus \{a\}$ vers F est $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$. Pour toute application injective f de $E \setminus \{a\}$ vers F , il existe $n-p$ prolongements injectifs de f à E qui correspondent aux $n-p$ images possibles de l'élément a . Par suite,

$$A_{n,p+1} = (n-p)A_{n,p} = (n-p) \frac{n!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-(p+1))!}.$$

La propriété est donc vérifiée au rang $p+1$.

Conclusion : Par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier p . ◇

Définition 8.26. On note

$$A_n^p = \begin{cases} \frac{n!}{(n-p)!} & \text{si } n \geq p \\ 0 & \text{si } n < p \end{cases}$$

A_n^p est le nombre **d'arrangements** de p éléments dans un ensemble à n éléments, c'est-à-dire le nombre de façons différentes de choisir une suite ordonnée et sans répétition de p éléments parmi n .

Théorème 8.27. Soit E et F deux ensembles finis tels que $\text{Card } E = \text{Card } F = n$.

Le nombre d'applications bijectives de E vers F est $n!$.

Dans le cas où $E = F$, une bijection de E dans E est aussi appelée une permutation de E . L'ensemble des permutations de $\mathbb{N}_n^*$ est appelé le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ et son cardinal est

$$\text{Card } \mathcal{S}_n = n!.$$

Démonstration Comme E et F sont des ensembles finis de même cardinal, toute application injective est bijective donc le nombre de bijections est $A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$. ◇

Exercice 8.28. Une urne contient 8 boules rouges, 3 blanches et 9 noires. On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne. Combien de tirages différents peut-on obtenir

1. en général ?
2. avec trois boules rouges ?
3. avec trois boules blanches ?
4. avec dans l'ordre : une rouge, une blanche et une noire ?
5. avec dans le désordre : une rouge, une blanche et une noire ?
6. avec dans le désordre : deux rouges et une blanche ?

8.2.3 Combinaisons

Théorème 8.29. Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier tels que $p \leq n$. Le nombre de parties de E de cardinal p est : $\frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Démonstration Cette démonstration proche de celle du nombre d'applications injectives sera vue en TD. $\diamond$

Définition 8.30. On note

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \begin{cases} \frac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } n \geq p \\ 0 & \text{si } n < p \end{cases}$$

C_n^p est le nombre de **combinaisons** de p éléments dans un ensemble à n éléments, c'est-à-dire le nombre de façons différentes de choisir un ensemble non ordonné et sans répétition de p éléments parmi n .

Proposition 8.31. Soit n et p des entiers avec $n \geq 1$.

1. $C_n^0 = C_n^n = 1$.
2. $\forall p \leq n, C_n^p = C_n^{n-p}$.
3. $\forall 1 \leq p \leq n, C_{n+1}^p = C_n^p + C_n^{p-1}$. (Triangle de Pascal)

Démonstration Ces démonstrations seront vues en TD mais sont souvent connues depuis la terminale! $\diamond$

Théorème 8.32 (Formule du binôme de Newton).

$$(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2)(\forall n \in \mathbb{N}^*) \left((a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} \right).$$

Démonstration Cette belle démonstration par récurrence vous sera proposée en TD. $\diamond$

Exercice 8.33. On appelle "main" toute partie de 8 cartes extraites d'un jeu de 32 cartes. Combien existe-t-il

1. de mains différentes ?
2. de mains contenant au moins un as ?

Test d'assimilation numéro 6

1. Donner deux ensembles différents équipotents à $\{0, 1, 2, 3\}$.
2. Qu'est ce que le cardinal d'un ensemble fini ? L'appellation "LE cardinal" est-elle justifiée ?
3. Donner trois ensembles dénombrables et trois ensembles infinis non dénombrables.
4. Soit A , B et C trois parties d'un même ensemble fini E . Donner une formule pour $\text{Card}(A \cup B \cup C)$. La démontrer à partir de celle de $\text{Card}(A \cup D)$ où D est une partie de E à déterminer. Vérifier qu'elle coïncide avec la formule du crible dans le cas $p = 3$.
5. Soit E et F deux ensembles finis tels que $\text{Card } E < \text{Card } F$. Que peut-on dire des applications de E dans F ? Sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?
6. Même question pour $\text{Card } E > \text{Card } F$. Et si $\text{Card } E = \text{Card } F$?
7. Soit $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ et $F = \{f_1, \dots, f_p\}$. Construire une bijection de $E \times F$ dans $\mathbb{N}_n^* \times \mathbb{N}_p^*$ et proposer une autre preuve que celle du cours de la proposition $\text{Card } E \times F = \text{Card } E \times \text{Card } F$.
8. Expliciter toutes les permutations de $\{1, 2, 3\}$ et retrouver le cardinal de $\mathcal{S}_3$.
9. Calculer de deux manières différentes (en utilisant la définition ou la formule) A_n^0 , A_n^1 et A_n^n .
10. Même question pour C_n^0 , C_n^1 et C_n^n .

Chapitre 9

Suites numériques réelles

9.1 Définitions, Opérations

9.1.1 Définitions

Définition 9.1. On appelle **suite réelle** toute application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ qui à un entier naturel n donné associe un réel $u(n)$ encore noté u_n .

On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles. Une suite u est désignée par $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $u(n) = u_n$ est appelé **terme général** de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemple 9.2.

- Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{n+1}$. Calculez u_0 , u_1 et u_{100} .
- Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 3.$$

C'est une suite arithmétique de raison $q = 3$.

- Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 5u_n.$$

C'est une suite géométrique de raison $q = 5$.

Les cas particuliers de suites définies par une relation de récurrence seront étudiées plus précisément à la fin de ce chapitre.

Définition 9.3. On dit qu'une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **suite extraite** de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Proposition 9.4. Si φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$.

Démonstration Effectuons une démonstration par récurrence.

Définition de l'assertion à démontrer : Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $P(n)$ la propriété

$$\varphi(n) \geq n.$$

Initialisation : Comme φ est une application de $\mathbb{N}$ dans lui-même, la propriété est vérifiée au rang $n = 0$.

Hérédité : Supposons qu'elle est vraie pour un rang n donné et montrons qu'elle reste vraie au rang $n + 1$. Comme φ est strictement croissante, $\varphi(n + 1) > \varphi(n) \geq n$ car, par hypothèse, $P(n)$ est vraie. Sachant que $\varphi(n + 1)$ est un entier et que $\varphi(n + 1) > n$, on en déduit que $P(n + 1)$ est vraie puis que la propriété P est héréditaire.

Conclusion : Ainsi, par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\diamond$

Exemple 9.5.

- La suite extraite $(u_{n+n_0})_{n \in \mathbb{N}}$ permet de ne définir une suite qu'à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$: Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \geq 3$ par $u_n = \ln \frac{1}{n-2}$. Vérifiez que cette suite est bien définie pour $n \geq 3$.
- Les suites extraites des termes pairs $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et des termes impairs $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont très fréquemment utilisées : Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$. Donnez la suite extraite des termes pairs, des termes impairs.

Définition 9.6. On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **suite de Cauchy** si elle vérifie

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, (p \geq n_\varepsilon \text{ et } q \geq n_\varepsilon) \Rightarrow |u_p - u_q| \leq \varepsilon$$

ou encore, de manière équivalente,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall (n, h) \in \mathbb{N}^2, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_{n+h} - u_n| \leq \varepsilon$$

Exemple 9.7.

- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n}$. Montrer que cette suite est de Cauchy.
- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Calculez u_n pour n allant de 1 à 5. Montrer que cette suite n'est pas de Cauchy. On pourra montrer par exemple que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_{2n} - u_n| \geq \frac{1}{2}$.

9.1.2 Opérations

Définition 9.8. On munit l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles de deux opérations internes : une **addition** $\oplus$ et une **multiplication** $\otimes$ et d'une opération externe : une **multiplication par un réel** $\bullet$ de la manière suivante

$$\begin{aligned}(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \oplus (v_n)_{n \in \mathbb{N}} &= (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \otimes (v_n)_{n \in \mathbb{N}} &= (u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ \lambda \bullet (u_n)_{n \in \mathbb{N}} &= (\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}\end{aligned}$$

Ces opérations possèdent les mêmes propriétés que les opérations classiques entre réels :

- Les opérations $\oplus$ et $\otimes$ sont commutatives :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \oplus (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \oplus (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \otimes (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \otimes (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

- Les opérations $\oplus$ et $\otimes$ sont associatives :

$$((u_n)_{n \in \mathbb{N}} \oplus (v_n)_{n \in \mathbb{N}}) \oplus (w_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \oplus ((v_n)_{n \in \mathbb{N}} \oplus (w_n)_{n \in \mathbb{N}})$$

$$((u_n)_{n \in \mathbb{N}} \otimes (v_n)_{n \in \mathbb{N}}) \otimes (w_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \otimes ((v_n)_{n \in \mathbb{N}} \otimes (w_n)_{n \in \mathbb{N}})$$

- Les opérations $\oplus$ et $\otimes$ possèdent un élément neutre :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \oplus (0)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \otimes 1 = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

- Chaque suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède un opposé $(-u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par l'opération $\oplus$:

$$(-u_n)_{n \in \mathbb{N}} \oplus (u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (0)_{n \in \mathbb{N}}$$

- La multiplication $\otimes$ est distributive par rapport à l'addition $\oplus$:

$$(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \otimes [(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \oplus (v_n)_{n \in \mathbb{N}}] = [(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \otimes (u_n)_{n \in \mathbb{N}}] \oplus [(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \otimes (v_n)_{n \in \mathbb{N}}]$$

Certaines de ces propriétés, qui seront revues à l'UV4 d'algèbre linéaire, confèrent à l'ensemble des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une structure d'**espace vectoriel** réel.

Exemple 9.9. Avec les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par les termes généraux suivants, calculer la somme et le produit des suites

1. $u_n = (-1)^n$ et $v_n = \sin n\pi$
2. $u_n = 3n$ et $v_n = 0$
3. $u_n = \frac{1}{n+1}$ et $v_n = 1$

Définition 9.10. On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **majorée** si l'ensemble de ses termes admet un majorant :

$$\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$$

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **minorée** si l'ensemble de ses termes admet un minorant :

$$\exists m \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$$

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **bornée** si elle est majorée et minorée :

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$$

ou de manière équivalente,

$$\exists K \geq 0 \mid \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq K$$

Remarque 9.11. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$. Alors la dernière phrase ci-dessus est vérifiée avec

1. $K = M$ si $0 \leq m < M$
2. $K = |m| = -m$ si $m < M \leq 0$
3. $K = \max(|m|, |M|)$ si $m < 0 < M$

Exemple 9.12. Indiquer si les suites suivantes sont majorées, minorées, bornées en donnant à chaque fois une borne adéquate :

1. $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$
2. $u_n = \sin n$ pour $n \in \mathbb{N}$
3. $u_n = 2n$ pour $n \in \mathbb{N}$
4. $u_{2n} = -n$ et $u_{2n+1} = n$ pour $n \in \mathbb{N}$

Proposition 9.13. Toute suite extraite d'une suite bornée est bornée.

Démonstration Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée. Il existe donc un réel $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$. Soit $v_n = u_{\varphi(n)}$ une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \in \mathbb{N}$ et $|u_{\varphi(n)}| \leq M$. Par conséquent, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. $\diamond$

Proposition 9.14. Toute suite de Cauchy est bornée.

Démonstration Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. On sait par définition que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, (p \geq n_\varepsilon \text{ et } q \geq n_\varepsilon) \Rightarrow |u_p - u_q| \leq \varepsilon$$

Prenons $\varepsilon = 1 > 0$ et notons $n_\varepsilon = n_1 \in \mathbb{N}$. Alors, $\forall p \in \mathbb{N}, p \geq n_1$ implique $|u_p - u_{n_1}| \leq 1$. Or, par inégalité triangulaire, $|u_p| \leq |u_p - u_{n_1}| + |u_{n_1}|$. Donc en posant $M_1 = |u_{n_1}| + 1$, on a

$$\forall p \in \mathbb{N}, p \geq n_1 \Rightarrow |u_p| \leq M_1$$

On a ainsi majoré tous les termes de la suite à partir du rang n_1 . Il ne reste à considérer que les n_1 premiers termes de la suite qui sont en nombre fini.

Soient donc $M_2 = \max(|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{n_1-1}|) \geq 0$ et $M = \max(M_1, M_2)$. Alors, tous les termes de la suite sont majorés en valeur absolue par $M \geq 0$ et la suite est, par définition, bornée. $\diamond$

9.2 Convergence, divergence

Le but de ce paragraphe est de définir rigoureusement la notion de convergence d'une suite vers une limite, que vous avez intuitivement vue dans le secondaire.

9.2.1 Définitions des suites convergentes

Définition 9.15. On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** (ou **est convergente**) si

$$\exists l \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$$

On dit alors que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$.

Exemple 9.16. Montrer, en revenant à la définition, que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$ converge vers $l = 2$.

9.2.2 Conséquences immédiates de la convergence

Proposition 9.17. Si une suite réelle converge vers $l \in \mathbb{R}$ alors la limite l est **unique**.

On note $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et on dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers **LA** limite $l \in \mathbb{R}$.

Démonstration Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergente. Raisonnons par l'absurde et supposons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet deux limites distinctes $l \neq l'$. Alors, on a par définition

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n'_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n'_\varepsilon \Rightarrow |u_n - l'| \leq \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Définissons $n_0 = \max(n_\varepsilon, n'_\varepsilon)$. Soit $n \geq n_0$. Alors par inégalité triangulaire,

$$|l - l'| \leq |l - u_n| + |u_n - l'| \leq 2\varepsilon$$

On a donc montré que $\forall \varepsilon > 0, |l - l'| \leq 2\varepsilon$. Choisissons $\varepsilon = |l - l'|/3 > 0$ car $l \neq l'$. Alors $1 \leq 2/3$. Ceci est absurde donc $l = l'$ et la limite d'une suite est unique si elle existe. $\diamond$

Proposition 9.18. Si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente alors elle est bornée.

Démonstration Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergeant vers $l \in \mathbb{R}$. On sait donc que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$$

Prenons $\varepsilon = 1 > 0$ et notons $n_\varepsilon = n_1 \in \mathbb{N}$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1$ implique $|u_n - l| \leq 1$. Or, par inégalité triangulaire, $|u_n| \leq |u_n - l| + |l|$. Donc en posant $M_1 = |l| + 1$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 \Rightarrow |u_n| \leq M_1$$

On a ainsi majoré tous les termes de la suite à partir du rang n_1 . Il ne reste à considérer que les n_1 premiers termes de la suite qui sont en nombre fini.

Soient donc $M_2 = \max(|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{n_1-1}|) \geq 0$ et $M = \max(M_1, M_2)$. Alors, tous les termes de la suite sont majorés en valeur absolue par $M \geq 0$ et la suite est, par définition, bornée. $\diamond$

Proposition 9.19. *Si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la limite $l \in \mathbb{R}$ alors toute suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la même limite l .*

Démonstration Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente vers $l \in \mathbb{R}$. Traduisons cette hypothèse :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$$

Soit $v_n = u_{\varphi(n)}$ une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Soit $\varepsilon > 0$, n_ε défini comme ci-dessus et n un entier tel que $n \geq n_\varepsilon$. Alors

$$|v_n - l| = |u_{\varphi(n)} - l| \leq \varepsilon$$

car $\varphi(n) \geq n \geq n_\varepsilon$. Finalement, on a démontré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |v_n - l| \leq \varepsilon$$

donc que la suite extraite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge également vers l . $\diamond$

Remarque 9.20. *La limite d'une suite ne dépend pas des premiers termes de la suite.*

Exemple 9.21. *En utilisant la contraposée de cette proposition, montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sin(n\frac{\pi}{2})$ ne converge pas.*

Attention : La convergence d'une suite extraite n'implique pas en général la convergence de la suite. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = (1 + (-1)^n)n$.

Cependant, sous certaines conditions, la convergence des suites extraites peut entraîner la convergence de la suite, comme le montre le résultat suivant.

Proposition 9.22. *Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite telle que les deux suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite finie l , alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l .*

Démonstration Si $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite finie l alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_{\varepsilon,1} \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_{\varepsilon,1} \Rightarrow |u_{2n} - l| \leq \varepsilon$$

et

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_{\varepsilon,2} \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_{\varepsilon,2} \Rightarrow |u_{2n+1} - l| \leq \varepsilon$$

En posant, pour tout $\varepsilon > 0$, $n_{\varepsilon,0} = \max\{2n_{\varepsilon,1}, 2n_{\varepsilon,2} + 1\}$ on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_{\varepsilon,0} \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$$

ce qui prouve la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers l . $\diamond$

Remarque 9.23. *Ce résultat se généralise à tout recouvrement fini de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$,*

i.e. à toutes N suites extraites $(u_{\varphi_i(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ avec $1 \leq i \leq N$ telles que $\bigcup_{i=1}^N \varphi_i(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$.

Proposition 9.24. *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergeant vers l et soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et continue en l alors la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(l)$.*

Démonstration Ce théorème sera démontré dans l'UV "Analyse". $\diamond$

Proposition 9.25. *Si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente **alors** c'est une suite de Cauchy.*

Démonstration Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente et notons l sa limite. Traduisons cette hypothèse :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$, n_ε défini comme ci-dessus et (p, q) deux entiers tels que $p \geq n_\varepsilon$ et $q \geq n_\varepsilon$. Alors

$$|u_p - u_q| \leq |u_p - l| + |l - u_q| \leq 2\varepsilon$$

On a ainsi démontré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, (p \geq n_\varepsilon \text{ et } q \geq n_\varepsilon) \Rightarrow |u_p - u_q| \leq 2\varepsilon$$

Ceci traduit bien que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. $\diamond$

Exemple 9.26. *Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ ne converge pas.*

9.2.3 Suites divergentes

Définition 9.27. *Une suite qui ne converge pas est appelée une **suite divergente**. En particulier, elle vérifie*

$$\forall l \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0 \mid \forall n \in \mathbb{N}, \exists p_{n,\varepsilon} \in \mathbb{N} \mid p_{n,\varepsilon} \geq n \text{ et } |u_{p_{n,\varepsilon}} - l| > \varepsilon$$

Exemple 9.28. *Etudier la convergence ou la divergence des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par les termes généraux $u_n = n$, $u_n = (-1)^n$, $u_n = \sin n$.*

On distingue parmi les suites divergentes celles qui tendent vers plus l'infini $(+\infty)$ et celles qui tendent vers moins l'infini $(-\infty)$.

Définition 9.29. *Une **suite** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **divergente admet $+\infty$ comme limite** et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ si*

$$\forall A > 0, \exists n_A \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_A \Rightarrow u_n > A$$

*Une **suite** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **divergente admet $-\infty$ comme limite** et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ si*

$$\forall A > 0, \exists n_A \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_A \Rightarrow u_n < -A$$

Proposition 9.30. *Une suite tendant vers $\pm\infty$ est divergente. La réciproque est fausse*

Exemple 9.31. *Etudier la convergence, la divergence et si besoin la limite des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par les termes généraux $u_n = n$, $u_n = (-1)^n$, $u_n = \sin n$.*

Proposition 9.32. *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite divergeant vers $+\infty$. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ alors la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l .*

9.2.4 Théorèmes d'encadrement

En revenant directement à la définition, on peut transmettre des propriétés de la limite aux termes de la suite, à partir d'un certain rang.

Proposition 9.33. *Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l et si $a < l < b$, alors la suite est comprise strictement entre a et b à partir d'un certain rang, c'est-à-dire*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow a < u_n < b$$

Démonstration Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergent vers l . Traduisons cette hypothèse :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$$

On sait que $l < b$, montrons que $u_n < b$ à partir d'un certain rang. Posons $\varepsilon = (b-l)/2 > 0$ et $n_0 = n_\varepsilon$. Si $n \geq n_0$ alors $-\varepsilon \leq u_n - l \leq \varepsilon$ et $u_n \leq l + (b-l)/2 = (b+l)/2 < b$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n < b$$

La minoration par a se montre de la même manière. ◇

Corollaire 9.34. *Si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite non nulle $l \neq 0$ alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(\frac{1}{u_n})_{n \geq n_0}$ soit bien définie.*

Proposition 9.35. *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes vers l et l' respectivement. On suppose qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que*

$$n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq v_n$$

Alors, $l \leq l'$. Le résultat reste inchangée même si l'on suppose $u_n < v_n$. On dit que les inégalités sont conservées au sens large lors du passage à la limite.

Démonstration Par définition, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n'_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n'_\varepsilon \Rightarrow |v_n - l'| \leq \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Choisissons $n_0 = \max(n_\varepsilon, n'_\varepsilon)$ et $n \geq n_0$. Alors

$$l - l' = (l - u_n) - (l' - v_n) + (u_n - v_n) \leq 2\varepsilon$$

Raisonnons par l'absurde. Si $l - l' > 0$, choisissons $\varepsilon = (l - l')/3 > 0$. Alors $1 \leq 2/3$, c'est absurde. Donc $l - l' \leq 0$ et $l \leq l'$. La démonstration reste inchangée si on remplace l'hypothèse $u_n \leq v_n$ par $u_n < v_n$. ◇

Remarque 9.36. *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par les termes généraux $u_n = 1/n$ et $v_n = 2/n$. Alors $u_n < v_n$ et pourtant leurs limites sont égales. Les inégalités sont bien conservées au sens large en passant à la limite.*

Proposition 9.37. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq v_n$$

Alors, on a les résultats suivants :

1. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$
2. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

Démonstration

1. Supposons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. Alors,

$$\forall A > 0, \exists n_A \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_A \Rightarrow u_n > A$$

Or $u_n \leq v_n$ pour n assez grand donc

$$\forall A > 0, \exists n'_A = \max(n_A, n_0) \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n'_A \Rightarrow v_n > A$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

2. Il suffit de considérer les suites $(-u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(-v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et de se ramener au premier cas.

◇

Théorème 9.38. (Théorème des gendarmes) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont trois suites réelles vérifiant les trois propositions suivantes

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n$
2. la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l : \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$
3. la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l : \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$

Alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l : \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$

Démonstration Traduisons l'hypothèse 2. :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Par l'assertion énoncée ci-dessus, il existe un entier n_1 tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$$

Ainsi, $-\varepsilon \leq u_n - l \leq \varepsilon$ et $l - \varepsilon \leq u_n \leq l + \varepsilon$. De même, on montre à partir de l'hypothèse 3. qu'il existe un entier n_2 tel que pour tout $n \geq n_2$, $l - \varepsilon \leq w_n \leq l + \varepsilon$. Posons $n_\varepsilon = \max(n_1, n_2)$. Alors pour tout $n \geq n_\varepsilon$, on a

$$l - \varepsilon \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq l + \varepsilon$$

Ainsi,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |v_n - l| \leq \varepsilon$$

et la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l .

◇

Exemple 9.39. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par le terme général $u_n = \frac{\sin n}{n}$.

9.3 Opérations sur les limites

Dans ce paragraphe, nous allons démontrer à l'aide de la définition, les opérations usuelles que vous avez l'habitude de faire pour le calcul des limites.

9.3.1 Addition

Proposition 9.40. *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles convergeant respectivement vers l et l' . Alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \oplus (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l + l'$.*

Démonstration Traduisons nos deux hypothèses :

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0, \exists n'_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n'_\varepsilon \Rightarrow |v_n - l'| \leq \varepsilon\end{aligned}$$

Montrons que $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l + l'$. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Notons $n_0 = \max(n_\varepsilon, n'_\varepsilon)$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$. Alors

$$|(u_n + v_n) - (l + l')| = |(u_n - l) + (v_n - l')| \leq |u_n - l| + |v_n - l'| \leq 2\varepsilon$$

D'où

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |(u_n + v_n) - (l + l')| \leq 2\varepsilon$$

Ceci démontre bien que la suite $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l + l'$. $\diamond$

Exemple 9.41. *Etudier la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont le terme général est $u_n = \frac{1}{n} + 3$.*

9.3.2 Produit

Proposition 9.42. *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles convergeant respectivement vers l et l' . Alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \otimes (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ll' .*

Démonstration Traduisons nos deux hypothèses :

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0, \exists n'_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n'_\varepsilon \Rightarrow |v_n - l'| \leq \varepsilon\end{aligned}$$

Montrons que $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ll' . Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Notons $n_0 = \max(n_\varepsilon, n'_\varepsilon)$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$. Alors

$$|(u_n v_n) - (ll')| = |(u_n - l)v_n + l(v_n - l')| \leq |u_n - l||v_n| + |l||v_n - l'| \leq \varepsilon(|v_n| + |l|)$$

Or la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Elle est donc bornée et il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |v_n| \leq M$. Ainsi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |(u_n + v_n) - (l + l')| \leq (M + |l|)\varepsilon$$

Ceci démontre bien que la suite $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ll' . $\diamond$

Exemple 9.43. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par le terme général $u_n = (1 + e^{-n})^2 \text{Arctan } n$.

Corollaire 9.44. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers l . Soit $a \in \mathbb{R}$ un réel donné. Alors la suite $a \bullet (u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (au_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers al .

Démonstration Il suffit d'appliquer le théorème précédent à la suite constante égale à a . On peut également réécrire la démonstration dans ce cas plus simple. $\diamond$

Corollaire 9.45. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle bornée et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers 0 alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \otimes (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Démonstration Il suffit d'appliquer le théorème des gendarmes en majorant $|u_n v_n|$ par $M|v_n|$. Puis d'après le corollaire 9.44, cette dernière suite tend vers $M \times 0 = 0$. $\diamond$

Exemple 9.46. Etudier la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = e^{-n} \sin n$.

Proposition 9.47. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers $l \neq 0$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(\frac{1}{u_n})_{n \geq n_0}$ converge vers $\frac{1}{l}$.

Démonstration On sait par le corollaire 9.34 qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(\frac{1}{u_n})_{n \geq n_0}$ soit bien définie. Montrons maintenant qu'elle converge vers $\frac{1}{l}$. Traduisons tout d'abord notre hypothèse :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$$

De plus, $|l|/2 < |l| < 3|l|/2$ donc d'après la proposition 9.33, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq n_1$, $|l|/2 < |u_n| < 3|l|/2$. Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Notons $n_2 = \max(n_\varepsilon, n_0, n_1)$. Soit $n \geq n_2$ quelconque.

$$\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{l} \right| = \frac{|l - u_n|}{|u_n l|} \leq \frac{\varepsilon}{|u_n l|} \leq \frac{\varepsilon}{|l|} \frac{2}{|l|}$$

Ainsi, on a bien démontré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{l} \right| \leq 2\varepsilon/l^2$$

Ceci termine la preuve de cette proposition. $\diamond$

Exemple 9.48. Etudier la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par le terme général suivant $u_n = \frac{1}{\text{Arctan } n}$.

9.3.3 Formes indéterminées

Dans le paragraphe précédent, nous n'avons considéré que des suites convergentes admettant des limites finies. On peut également étudier les opérations entre suites divergentes admettant comme limite $\pm\infty$. Nous avons alors les propositions suivantes.

Proposition 9.49. *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles divergentes admettant $+\infty$ comme limite commune. Alors la suite $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.*

Le résultat est identique en remplaçant $+\infty$ par $-\infty$.

Démonstration Traduisons nos hypothèses :

$$\forall A > 0, \exists n_A \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_A \Rightarrow u_n > A$$

$$\forall A > 0, \exists n'_A \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n'_A \Rightarrow v_n > A$$

Soit $A > 0$ et $n_A'' = \max(n_A, n'_A)$. Soit $n \geq n_A$ quelconque. Alors $u_n + v_n > 2A$. On a bien démontré que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n = +\infty$. La démonstration est identique pour $-\infty$ et nous vous laissons le soin de l'écrire ! $\diamond$

Exemple 9.50. *Etudier la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par le terme général suivant $u_n = 2n^2 + 3n$.*

Proposition 9.51. *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle divergente admettant $+\infty$ comme limite. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(\frac{1}{u_n})_{n \geq n_0}$ soit bien définie. De plus, elle converge vers 0.*

Le résultat est identique en remplaçant $+\infty$ par $-\infty$.

Démonstration Traduisons notre hypothèse :

$$\forall A > 0, \exists n_A \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_A \Rightarrow u_n > A$$

Prenons $A = 1$ et $n_0 = n_A$. Alors pour tout $n \geq n_0$, $u_n > 1$ et $\frac{1}{u_n}$ est bien définie. Montrons que cette suite converge vers 0. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $A = \frac{1}{\varepsilon} > 0$ et $n_\varepsilon = \max(n_0, n_A)$. Soit $n \geq n_\varepsilon$ quelconque. Alors

$$\left| \frac{1}{u_n} - 0 \right| = \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{A} = \varepsilon$$

On a donc bien montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{u_n} - 0 \right| \leq \varepsilon$$

ce qui prouve bien que la suite $(\frac{1}{u_n})_{n \geq n_0}$ converge vers 0. La démonstration pour $-\infty$ est identique, en faisant toutefois attention aux signes dans les inégalités. $\diamond$

Exemple 9.52. *Etudier la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par le terme général $u_n = \frac{1}{n}$.*

Proposition 9.53. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle **strictement positive** convergeant vers 0. Alors la suite $(\frac{1}{u_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et diverge vers $+\infty$.

Le résultat est identique en remplaçant une suite **strictement négative** convergeant vers 0. Elle diverge alors vers $-\infty$.

Démonstration Traduisons nos hypothèses :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |\frac{1}{u_n} - 0| \leq \varepsilon$

Comme $u_n > 0$, $\frac{1}{u_n}$ est bien définie. De plus, si $A > 0$, posons $\varepsilon = \frac{1}{A}$ et $n_\varepsilon = n_A$. Alors pour $n \geq n_\varepsilon$ quelconque, $\frac{1}{u_n} > \frac{1}{\varepsilon} = A$. On a donc bien montré que

$$\forall A > 0, \exists n_A \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_A \Rightarrow \frac{1}{u_n} > A$$

et que la suite $(\frac{1}{u_n})_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$. La démonstration pour $-\infty$ est identique en prenant bien soin aux signes dans les inégalités. $\diamond$

Exemple 9.54. Etudier la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par le terme général suivant $u_n = \frac{1}{n^2 e^{-n}}$.

Remarque 9.55. Il existe des formes indéterminées dans les opérations lors du passage à la limite :

$$+\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 1^\infty$$

On doit alors opérer sur les suites un changement d'écriture (factorisation, mise sous forme exponentielle) pour lever l'indétermination. Vous verrez également à l'UV3 un outil très puissant : les développements limités.

Exemple 9.56. Etudier la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par le terme général suivant $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

9.4 Suites monotones

9.4.1 Définitions et propriétés

Dans le cadre des suites réelles, on possède un outil supplémentaire qui est l'existence d'un ordre total $\leq$ sur $\mathbb{R}$. On peut donc comparer les éléments de la suite entre eux (ce qui ne sera plus le cas lorsque vous verrez les suites ou séries de fonctions ou les suites dans un espace quelconque).

Définition 9.57. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **croissante à partir d'un certain rang** si

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq u_{n+1}$$

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **strictement croissante à partir d'un certain rang** si

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n < u_{n+1}$$

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **décroissante à partir d'un certain rang** si

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_{n+1} \leq u_n$$

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **strictement décroissante à partir d'un certain rang** si

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_{n+1} < u_n$$

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **monotone à partir d'un certain rang** si, à partir d'un certain rang, elle est soit croissante, soit décroissante.

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **strictement monotone à partir d'un certain rang** si, à partir d'un certain rang, elle est soit strictement croissante, soit strictement décroissante.

Exemple 9.58.

- Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{n+2}{2n+1}$.
- Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par les deux suites extraites : $u_{2p} = \frac{1}{p}$ et $u_{2p-1} = \frac{1}{p^2}$.

Proposition 9.59. Toute suite réelle croissante majorée converge. De plus, sa limite est la borne supérieure de l'ensemble de ses termes, c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$$

Démonstration Notons $l = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$. Cette borne supérieure existe car la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée. Traduisons nos deux hypothèses :

1. la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$
2. la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée (par sa borne supérieure) : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq l$

Par définition de la borne supérieure, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid u_{n_\varepsilon} > l - \varepsilon$$

De plus, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant croissante,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow u_n \geq u_{n_\varepsilon} > l - \varepsilon$$

Enfin, utilisant la majoration par l , on peut écrire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon < u_n \leq l$$

et en passant à la valeur absolue

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$$

Ce qui montre bien que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l sa borne supérieure. $\diamond$

Proposition 9.60. *Toute suite décroissante minorée converge. De plus, sa limite est la borne inférieure de l'ensemble de ses termes, c'est-à-dire*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n$$

Démonstration La démonstration de cette proposition est identique à la précédente et laissée en exercice au lecteur. $\diamond$

Proposition 9.61. *Toute suite croissante non majorée est divergente. De plus, sa limite est $+\infty$.*

Démonstration Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante non majorée. La première hypothèse se traduit facilement par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$$

La seconde est plus délicate car c'est la négation de la phrase "la suite est majorée". Ainsi elle s'écrit

$$\begin{aligned} & \text{non } (\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M) \\ & \Leftrightarrow (\forall A > 0, \exists n_A \in \mathbb{N} \mid u_{n_A} > A) \end{aligned}$$

Comme la suite est croissante, on obtient

$$\forall A > 0, \exists n_A \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_A \Rightarrow u_n > A$$

Cette dernière phrase signifie bien que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$. $\diamond$

Proposition 9.62. *Toute suite décroissante non minorée est divergente. De plus, sa limite est $-\infty$.*

Démonstration La démonstration de cette proposition est identique à la précédente et laissée en exercice au lecteur. $\diamond$

9.4.2 Suites adjacentes

Définition 9.63. *Deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont dites **adjacentes** si*

1. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante
2. $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$

Théorème 9.64. *Si deux suites sont adjacentes alors elles convergent et elles ont même limite.*

Démonstration Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites adjacentes telles que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1} \text{ et } v_{n+1} \leq v_n$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = v_n - u_n$. Alors

$$w_{n+1} - w_n = v_{n+1} - u_{n+1} - v_n + u_n = (v_{n+1} - v_n) + (u_n - u_{n+1}) \leq 0$$

d'après la monotonie des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante. On sait de plus qu'elle converge vers 0, elle est donc positive. Par suite, on a $v_n \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi,

$$u_0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq v_0$$

et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante majorée par v_0 , $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante minorée par u_0 . Elles convergent donc toutes les deux vers des limites l et l' respectivement. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$, donc $l = l'$ et elles convergent vers la même limite. $\diamond$

Exemple 9.65. *Etudier la convergence des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivantes données par les termes généraux*

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = \frac{1}{nn!} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

9.4.3 Applications

Théorème 9.66. (*Théorème de Bolzano-Weierstrass*) *De toute suite réelle bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.*

Remarque 9.67. *On peut aussi traduire ce théorème de façon plus académique par : "Si une suite réelle est bornée, alors elle admet une sous-suite convergente."*

Démonstration Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de réels. Il existe deux réels a et b tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a \leq u_n \leq b$$

Notons $a_0 = a$ et $b_0 = b$ et construisons deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante : on découpe le segment $[a_0, b_0]$ qui contient tous les termes de la suite en deux : $[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}] \cup [\frac{a_0+b_0}{2}, b_0]$. L'un au moins des deux nouveaux segments contient une infinité de termes de la suite, on le note $[a_1, b_1]$. Alors $a_0 \leq a_1$, $b_1 \leq b_0$ et $b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}$.

Réitérons le procédé en découpant le segment $[a_1, b_1]$ en deux : $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}] \cup [\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$. L'un de ces deux nouveaux segments au moins contient une infinité de termes de la suite, on le note $[a_2, b_2]$. Alors $a_1 \leq a_2$, $b_2 \leq b_1$ et $b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2}$.

On construit ainsi deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont l'une est croissante et l'autre décroissante et dont la différence des termes généraux tend vers 0. En effet, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq a_{n+1}$, $b_{n+1} \leq b_n$ et $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$. Ce sont donc des suites adjacentes,

elles convergent vers la même limite par le théorème 9.64. Notons-la $l \in \mathbb{R}$. On a donc $\cap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{l\}$.

Considérons maintenant la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ extraite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la façon suivante : posons $v_0 = u_0 \in [a, b]$. D'après le choix de $[a_1, b_1]$, il existe une infinité de termes de la suite entre a_1 et b_1 : en particulier, il existe $n_1 > 0$ tel que $v_1 = u_{n_1} \in [a_1, b_1]$. De même, on construit v_2 de la manière suivante : d'après le choix de $[a_2, b_2]$, il existe une infinité de termes de la suite entre a_2 et b_2 : en particulier, il existe $n_2 > n_1$ tel que $v_2 = u_{n_2} \in [a_2, b_2]$. On continue de même et on obtient une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout entier k , $v_k = u_{n_k} \in [a_k, b_k]$ avec $n_{k+1} > n_k$, c'est donc bien une suite extraite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq v_n \leq b_n$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l$ donc par le théorème des gendarmes, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l . $\diamond$

Théorème 9.68. *Une suite réelle est convergente si et seulement si c'est une suite de Cauchy.*

Démonstration La première implication est exactement la proposition 9.25 déjà prouvée.

Démontrons maintenant la réciproque. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Par la proposition 9.14, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(v_n = u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ convergente vers une limite notée $l \in \mathbb{R}$. On a donc les deux hypothèses suivantes : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy et la suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers $l \in \mathbb{R}$. Traduisons-les :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, p, q \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_p - u_q| \leq \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0, \exists n'_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n'_\varepsilon \Rightarrow |u_{\varphi(n)} - l| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $n_0 = \max \{n_\varepsilon, n'_\varepsilon\}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| &\leq |u_n - u_{\varphi(n)}| + |u_{\varphi(n)} - l| \\ &\Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon + \varepsilon \end{aligned}$$

car $\varphi(n) \geq n \geq n_0$ d'après la propriété 9.4. Ainsi,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leq 2\varepsilon$$

et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l . La réciproque du théorème est ainsi démontrée. $\diamond$

Remarque 9.69. *Il est en général faux de dire qu'une suite de Cauchy converge. Cette propriété n'est vraie que pour des suites appartenant à des espaces complets. Vous verrez en deuxième année qu'il existe des suites de fonctions qui sont de Cauchy et pourtant ne convergent pas. Dans le cas des suites réelles, le théorème 9.68 est toujours vrai car l'espace $(\mathbb{R}, |.|)$ est complet. Ces notions seront précisées en deuxième année.*

9.5 Suites récurrentes

9.5.1 Définitions, exemples

Définition 9.70. Soit f une fonction réelle définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **suite récurrente** si elle est définie de la manière suivante :

- $u_0 \in D$
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

Une telle suite n'est définie que si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in D$.

Exemple 9.71. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **arithmétique** s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$. Le réel r s'appelle **la raison** de la suite. Les suites arithmétiques sont des suites récurrentes définies par $u_0 \in \mathbb{R}, D = \mathbb{R}$ et $f(x) = x + r$. Remarquons qu'une suite arithmétique de raison r vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nr$$

Elle converge si et seulement si la raison r est nulle.

Exemple 9.72. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **géométrique** s'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n$. Le réel q s'appelle **la raison** de la suite. Les suites géométriques sont des suites récurrentes définies par $u_0 \in \mathbb{R}, D = \mathbb{R}$ et $f(x) = qx$. Remarquons qu'une suite géométrique de raison q vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = q^n u_0$$

Elle converge si et seulement si la raison $q \in]-1, 1]$.

Exemple 9.73. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **arithmético-géométrique** s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$. Les suites arithmético-géométriques sont des suites récurrentes définies par $u_0 \in \mathbb{R}, D = \mathbb{R}$ et $f(x) = ax + b$. Les cas particuliers $a = 1$ et $b = 0$ correspondent respectivement aux cas de suites arithmétiques et géométriques. Si $a \neq 1$, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$ est une suite géométrique de raison a .

9.5.2 Convergence

Définition 9.74. Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On dit que $x_0 \in \mathbb{R}$ est un **point fixe** de f si et seulement si $x_0 \in D$ et $f(x_0) = x_0$.

On dit qu'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est **stable par f** si et seulement si $f(I) \subset I$, c'est-à-dire $\forall x \in I, f(x) \in I$.

Proposition 9.75. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses :

- f est continue sur I
- I est stable par f
- f est croissante sur I

Alors toute suite récurrente définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$. De plus, elle est monotone et si elle converge, c'est vers un point fixe de f .

Démonstration On peut démontrer par récurrence les assertions suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$ (utiliser $u_0 \in I$ et I stable par f).
2. Si $u_0 < u_1$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante (définir $P(n) : "u_n \leq u_{n+1}"$)
3. Si $u_0 > u_1$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante (définir $P(n) : "u_n \geq u_{n+1}"$)

On a ainsi démontré que toute suite récurrente est bien définie et monotone pourvue que $u_0 \in I$. Si de plus $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l alors f étant continue, l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$ devient à la limite $l = f(l)$ car la suite $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donc converge vers la même limite l . $\diamond$

Théorème 9.76. (Théorème du point fixe) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe une constante $k \in]0, 1[$ qui vérifie

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq k |x - y|$$

Alors la fonction f admet un unique point fixe $l \in \mathbb{R}$ tel que $f(l) = l$. De plus, toute suite récurrente définie par

$$u_0 \in \mathbb{R}, \quad u_{n+1} = f(u_n), \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

converge vers l .

Remarque 9.77. Une telle fonction f est dite Lipschitzienne de rapport k . En particulier, quand $k \in]0, 1[$, on dit aussi que f est contractante. On montrera à l'UV3 que ces fonctions sont continues.

Démonstration Cette démonstration se fait en deux temps, d'abord on montre l'existence d'un tel point fixe puis son unicité.

Existence : Soit $u_0 \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrons qu'elle est de Cauchy. Constatons tout d'abord que

$$|u_{n+1} - u_n| = |f(u_n) - f(u_{n-1})| \leq k |u_n - u_{n-1}| \leq k^n |u_1 - u_0|$$

par une récurrence immédiate. Soit maintenant $(n, h) \in \mathbb{N}^2$,

$$\begin{aligned} |u_{n+h} - u_n| &\leq |u_{n+h} - u_{n+h-1}| + \cdots + |u_{n+1} - u_n| \\ &\leq k^{n+h-1} |u_1 - u_0| + \cdots + k^n |u_1 - u_0| \text{ d'après le point ci-dessus} \\ &\leq |u_1 - u_0| k^n \sum_{p=0}^{h-1} k^p \text{ somme des termes d'une suite géométrique de raison } k \\ &\leq |u_1 - u_0| k^n \frac{1 - k^h}{1 - k} \leq |u_1 - u_0| \frac{k^n}{1 - k} \text{ car } k \in]0, 1[\end{aligned}$$

Cette dernière majoration tendant vers 0 quand n tend vers l'infini indépendamment de h , on a bien montré que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle de Cauchy. D'après le théorème

9.68, on sait qu'elle converge vers l point fixe de f car celle-ci est continue.

Unicité : Raisonnons par l'absurde et supposons que f admet deux points fixes distincts l et l' . Alors $l = f(l)$, $l' = f(l')$ et $l \neq l'$. Or

$$|l - l'| = |f(l) - f(l')| \leq k|l - l'|$$

En divisant par $|l - l'| \neq 0$, on obtient $1 \leq k$ qui est absurde. Ainsi, il existe un unique point fixe de f et il est bien obtenu comme limite de toute suite récurrente. $\diamond$

Test d'assimilation numéro 7

1. Donner la définition d'une suite de Cauchy, d'une suite convergente. Montrer qu'une suite convergente est de Cauchy.
2. Donner une suite arithmétique de raison π . En donner deux suites extraites différentes.
3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = e^{-n^2+2n}$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée.
4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente. Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n \geq 10}$ ont-elles même limite ? Pourquoi ?
5. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_{2n} = \frac{1}{n} \text{ et } u_{2n+1} = \frac{\sin n}{n}$$

Etudier la convergence de cette suite et le cas échéant donner sa limite.

6. Montrer qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ à partir duquel la suite précédente est comprise entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$.
7. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Démontrer votre résultat.
 - a. Une suite monotone et bornée converge.
 - b. Une suite positive et strictement décroissante converge vers 0.
 - c. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = 1$
 - d. Toute suite bornée de réels converge.
 - e. Toute suite réelle de Cauchy converge.
8. Donner deux suites adjacentes et calculer leur limite commune.
9. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ et $u_0 > 0$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.
On pourra s'aider d'un dessin.
10. Toute fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est lipschitzienne.

Chapitre 10

Annales

10.1 Partiel

Exercice I : (4 points)

Montrer en utilisant la contraposée que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n^2 \text{ pair}) \Rightarrow (n \text{ pair})$$

Exercice II : (8 points)

Soient E et F deux ensembles non vides. Soit f une application de E dans F . On définit sur E une relation binaire $\mathcal{R}$ par

$$\forall (x, x') \in E^2, \quad x\mathcal{R}x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E .
2. On suppose pour cette question que $E = [0, 2\pi]$, $F = [-1, 1]$ et f est l'application sinus de E dans F . Donner la classe d'équivalence de 0, de $\pi/4$, de $\pi/2$.
3. On revient au cas général. On note C_x la classe d'équivalence de x . Montrer que

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow \forall x \in E, C_x = \{x\}$$

4. Montrer que $\forall x \in E, C_x = f^{-1}(\{f(x)\})$.

Exercice III : (8 points)

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) &\mapsto (x_1 + x_2, x_1 - x_2) \end{aligned}$$

1. Montrer que f est injective
2. Montrer que f est surjective.
3. Calculer $f(\{(-2, 1), (0, 3)\})$, $f(\mathbb{R}^2)$ et $f^{-1}(\mathbb{R} \times \{0\})$.
4. On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1, $\mathcal{C}'$ le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{2}$. Montrer que $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$.

10.2 Examen

Exercice I : (6 points)

Soit f l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

1. Faire le tableau de variations de f et tracer son graphe.
2. Calculer $f(0)$, $f(2)$, $f(\frac{1}{2})$, $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{2\})$ et $f^{-1}(\{\frac{1}{2}\})$.
3. L'application f est-elle injective ? surjective ? Justifiez vos réponses.
4. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1; 1]$.
5. Soit g l'application définie de $[-1; 1]$ dans $[-1; 1]$ par

$$\forall x \in [-1, 1], \quad g(x) = f(x).$$

Montrer que g est bijective.

6. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in]0, 1]$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et qu'elle converge vers 1.
7. Que se passe-t-il si $u_0 \in [-1, 0[$? si $u_0 = 0$? (On ne demande pas de démonstrations)

Exercice II : (6 points)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$.

1. On suppose que $0 \leq l < 1$.
 - i. Donner la définition de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$.

ii. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $k \in [0, 1[$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq k^{n-n_0} u_{n_0}$$

iii. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

2. On suppose que $l > 1$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. (Indication : on pourra étudier la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = \frac{1}{u_n}$).
3. On suppose que $l = 1$. Montrer, avec deux exemples simples, qu'on ne peut pas conclure quant à la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice III : (3 points)

Trois individus accusés d'un crime font les témoignages suivants :

- Dao : "Logan est coupable et Medhi ne l'est pas ."
- Logan : "Si Dao est coupable alors Medhi l'est aussi."
- Medhi : "Je ne suis pas coupable mais au moins un des deux autres est coupable."

On note D l'assertion "Dao est coupable", L l'assertion "Logan est coupable" et M l'assertion "Medhi est coupable".

1. Traduire les trois témoignages à l'aide des assertions D , L , M et des mots ET, OU, NON.
2. Montrer que si tous disent vrai alors Logan est le seul coupable.
3. Montrer que si les innocents disent la vérité et les coupables mentent, alors Dao et Medhi sont coupables et Logan est innocent. (Indication : on pourra utiliser une table de vérité).

Exercice IV : (6 points)

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des cercles du plan. On considère sur $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ "être intérieur à" définie par

$$\mathcal{C} \text{ est intérieur à } \mathcal{C}' \Leftrightarrow \mathcal{C}\mathcal{R}\mathcal{C}' \Leftrightarrow AA' \leq r' - r$$

où $\mathcal{C}$ est le cercle de centre A et de rayon $r \geq 0$, $\mathcal{C}'$ le cercle de centre A' et de rayon $r' \geq 0$ et AA' la longueur du segment $[AA']$.

1. Soient $\mathcal{C}_1$ le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 4, $\mathcal{C}_2$ le cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon 2, $\mathcal{C}_3$ le cercle de centre $(0, 1)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ et $\mathcal{C}_4$ le cercle de centre $(-1, 0)$ et de rayon 1. Parmi $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$, lesquels sont en relation par $\mathcal{R}$? Justifiez vos réponses. (Indications : $\sqrt{2} \approx 1,414$ et on pourra faire un dessin).
2. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$.
3. Est-ce une relation d'ordre total?
4. Donnez s'ils existent, le maximum, le minimum, la borne inférieure et la borne supérieure de $\{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2\}$. Justifiez toutes vos réponses.
5. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $(-1, 0)$ et de rayon 1. Soit $\mathcal{C}'$ le cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon 1. Donnez s'ils existent, le maximum, le minimum, la borne inférieure et la borne supérieure de $\{\mathcal{C}, \mathcal{C}'\}$. On pourra s'aider d'un dessin.

10.3 Examen

Exercice I : (3 points)

On considère les trois assertions suivantes :

- (a) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(y \geq x \implies y^2 \geq x^2)$.
- (b) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(y \geq x \implies y^2 \geq x^2)$.
- (c) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(y \geq x \implies y^2 \geq x^2)$.

1. Ecrire la négation de ces trois propositions.
2. Déterminer lesquelles de ces 6 propositions sont vraies (justifiez votre réponse).

Exercice II : (5 points)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $0 < a < b$. On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$u_0 = b \text{ et } v_0 = a$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n + v_n}.$$

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
2. Vérifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{2}(u_n - v_n)$.
3. En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n - v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a)$.
4. Dédurre des questions précédentes que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
5. Montrer que la suite $(u_nv_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et donner sa valeur.
6. Dédurre des questions précédentes que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent et calculer leur limite.

Exercice III : (7 points)

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f((x, y)) = x + 2y \end{aligned}$$

1. a. Soit $z \in \mathbb{R}$. Calculer $f((z, 0))$.
b. Donner $E_0 = f^{-1}(\{0\})$.
c. L'application f est-elle surjective ? injective ? bijective ? Justifiez chacune de vos réponses.

2. a. Soit D la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 3$. Donner $f(D)$.
 b. Soit le carré $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| \leq 1 \text{ et } |y| \leq 1\}$. Montrer que $f(C) = [-3, 3]$.
3. Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$(x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2) \iff f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$$

- a. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$.
- b. Montrer que $(x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2)$ si et seulement si $(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \in E_0$.
- c. Donner la classe d'équivalence de $(1, \frac{5}{2})$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice IV : (5 points)

On considère sur $\mathbb{R}^2$ la relation suivante :

$$\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4, \quad (x, y) \mathcal{S} (x', y') \iff |x' - x| \leq y' - y.$$

1. Démontrer que $\mathcal{S}$ définit une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les majorants de $(1, 1)$ puis de $(-1, 1)$ pour la relation d'ordre $\mathcal{S}$ (illustrer vos résultats sur un dessin).
3. Est-ce une relation d'ordre total ? Justifiez votre réponse.
4. Soit $A = \{(1, 1), (-1, 1)\}$. Déterminer $\sup(A)$.
5. Soit le carré $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| \leq 1 \text{ et } |y| \leq 1\}$. Déterminer graphiquement $\sup(C)$ et s'il existe, $\max(C)$.

10.4 Devoir

Exercice I :

On considère les trois assertions suivantes :

- (a) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(y \geq x \implies y^2 \geq x^2)$.
- (b) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(y \geq x \implies y^2 \geq x^2)$.
- (c) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(y \geq x \implies y^2 \geq x^2)$.

1. Ecrire la négation de ces trois propositions.
2. Déterminer lesquelles de ces six propositions sont vraies (justifiez votre réponse).

Exercice II :

On définit une suite de polynômes par $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ et par la relation de récurrence pour $n \geq 2$ entier

$$P_n(x) = 2xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)$$

1. Calculer les polynômes jusqu'à P_8 inclus.
2. A partir des calculs précédents, effectuer une hypothèse sur le degré de P_n et sur la valeur du coefficient de x^n dans P_n .
3. Démontrer cette conjecture par récurrence. On précisera bien à partir de quelle valeur initiale de n elle est vraie et on soignera la rédaction.

Exercice III :

1. Représenter graphiquement l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$x^2 + y^2 \leq 9 \text{ et } ((x + y > 3) \text{ ou } (xy < 2))$$

2. Exprimer l'ensemble précédent à l'aide des opérateurs $\cap$ et $\cup$ appliqués à trois parties A , B et C de $\mathbb{R}^2$ que l'on définira.

10.5 Devoir

Exercice I :

On admettra que $e \in]0, 3[$. Pour tout x réel et tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme suivant

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\forall x > 0, e^x \geq P_n(x)$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\forall x \in [0, 1], e^x \leq P_n(x) + 3 \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.
3. En déduire qu'il existe un entier n (le calculer) tel que

$$0 < e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < 10^{-8}$$

et donner une valeur approchée de e à 10^{-8} près.

Exercice II :

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné (c'est-à-dire que $\leq$ est une relation d'ordre sur E). On cherche à définir une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$.

Soit R la relation binaire définie sur $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ par

$$XRY \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in X, \forall y \in Y, x \leq y \\ \text{ou} \\ X = Y \end{cases}$$

1. Vérifier que R est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$.
2. Soit $E = \{1, 2, 3\}$ muni de la relation d'ordre usuelle.
 - i) Ecrire $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$.
 - ii) La relation R définie précédemment est-elle une relation d'ordre totale sur $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$?
 - iii) $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ possède-t-il un plus grand élément, un plus petit élément? une borne supérieure, une borne inférieure?

Exercice III :

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, xy)$

1. Calculer l'image réciproque $f^{-1}(A)$ des ensembles A suivants :
 - i) $A = \{(3, 2)\}$
 - ii) $A = \{(10, 25)\}$
 - iii) $A = \{(1, 12)\}$
2. L'application f est-elle injective, surjective, bijective?
3. Soit (u, v) deux réels donnés. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} x + y &= u \\ xy &= v \end{cases}$$

d'inconnues (x, y) . En déduire l'ensemble $f(\mathbb{R}^2)$.