

UE 1 : Nombres et structures

Chapitre 1 : Nombres complexes

1. Rappels

(1) Définition :

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique couple (x, y) de nombres réels tel que $z = x + iy$. Le nombre x est noté $\operatorname{Re}(z)$ est appelé partie réelle de z , et le nombre y est noté $\operatorname{Im}(z)$ est appelé partie imaginaire de z . L'écriture $z = x + iy$ s'appelle forme algébrique de z .
Il va sans dire que la partie imaginaire d'un complexe est un réel et pas un imaginaire pur qui est un élément de $i\mathbb{R} = \{iy, y \in \mathbb{R}\}$.

(2*) exemple :

Calculons $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z)$ pour $z = (1 + i\sqrt{2})^3 + 1 + 8i$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$z = (1 + 3i\sqrt{2} - 6 - i2\sqrt{2}) + 1 + 8i$$

$$= -4 + i(\sqrt{2} + 8)$$

$$\text{Donc } \operatorname{Re}(z) = -4 \text{ et } \operatorname{Im}(z) = \sqrt{2} + 8$$

(3) définition :

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ où x et y sont des réels. Le conjugué de z , noté $\bar{z}$, est le nombre complexe défini par $\bar{z} = x - iy$.

(4) : Propriété :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \text{ et } \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

(5) Propriété :

Pour tout nombre complexe z , $z\bar{z} = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2$. Il suffit d'écrire l'identité remarquable

$$(x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2.$$

(6) Définition :

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit le module $|z|$ par la formule $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.

Si $z = a + ib$ avec a et b réels alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Si $z = a \in \mathbb{R}$, le module de z est égal à sa valeur absolue car $\sqrt{a^2} = |a|$, il y a continuité de la notation.

(7) Forme polaire ou trigonométrique d'un complexe :

Pour tout nombre complexe z , il existe θ réel (il en existe une infinité modulo 2π) tel que $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$.
Une telle écriture est appelée forme polaire ou trigonométrique de z .

(8*) Exercice :

Ecrire sous forme polaire les nombres $1+i$ et $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$|1+i| = \sqrt{2}$$

$$\text{Donc } 1+i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\left| -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = 1$$

$$\text{Donc } -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

(9) : Notation ;

$$\text{On pose } j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right)$$

$$j^2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = \bar{j}$$

$$\bar{j} = \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right) = \cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right) \text{ où } -\frac{2\pi}{3} \text{ est l'argument principal.}$$

2. Exponentielle d'un imaginaire pur

(10) Définition :

Pour tout θ réel on pose $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. Grâce à cette notation, on peut écrire les formes polaires de façon condensée $z = |z| e^{i\theta}$.

$$\text{Par exemple, } j = e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ et } \bar{j} = j^2 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}} \right)^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

(11) Conjugué de l'exponentielle d'un imaginaire pur :

Pour tout θ réel, $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

(12*) Démonstration :

$$\overline{e^{i\theta}} = \cos \theta - i \sin \theta = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = e^{-i\theta}$$

(13) Formules d'Euler :

$$\text{Pour tout } \theta \text{ réel, } \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

(14) Règles de calcul :

$$1) e^{i\theta} e^{i\omega} = e^{i(\theta+\omega)} \quad (\text{Equation fonctionnelle de l'exponentielle})$$

$$2) (ke^{i\theta})^n = k^n e^{in\theta} \quad (\text{Formule de Moivre})$$

$$3) \frac{1}{ke^{i\theta}} = \frac{1}{k} e^{-i\theta} \quad (\text{Ecriture de l'inverse})$$

(15*) Applications :

$$j^2 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}} \right)^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$\bar{j} = e^{\overline{i\frac{2\pi}{3}}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\beta = \frac{1+i\sqrt{3}}{-1-i} \text{ calculons } \beta^n \quad \beta = \frac{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}} = 2^{\frac{1}{2}} e^{i\pi\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\right)} = 2^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{13\pi}{12}}$$

$$\text{Donc } \beta^n = 2^{\frac{n}{2}} e^{in\frac{13\pi}{12}}$$

(16) Exercice :

Mettre les quatre complexes $\pm\sqrt{3} \pm 3i$ sous forme polaire :

$$-\sqrt{3} - 3i = 2\sqrt{3} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2\sqrt{3} \left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \right) = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

$$-\sqrt{3} + 3i = 2\sqrt{3} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2\sqrt{3} \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \right) = 2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\sqrt{3} - 3i = 2\sqrt{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2\sqrt{3} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\sqrt{3} + 3i = 2\sqrt{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2\sqrt{3} \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \right) = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$$

(17) Exercice :

Calculer β^n pour $\beta = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$\beta = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$\beta^n = \sqrt{2}^n e^{in\frac{\pi}{12}}$$

3. Exponentielle complexe et trigonométrie

3.1 Factorisation par l'arc moitié

Cette méthode permet de mettre sous forme polaire la somme de deux exponentielles de module 1.

(18) Formule :

$$e^{i\theta} + e^{i\varphi} = e^{i\frac{\theta+\varphi}{2}} \left(e^{i\frac{\theta-\varphi}{2}} + e^{-i\frac{\theta-\varphi}{2}} \right) = 2 \cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right) e^{i\frac{\theta+\varphi}{2}}$$

$$e^{i\theta} - e^{i\varphi} = e^{i\frac{\theta+\varphi}{2}} \left(e^{i\frac{\theta-\varphi}{2}} - e^{-i\frac{\theta-\varphi}{2}} \right) = 2i \sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right) e^{i\frac{\theta+\varphi}{2}}$$

(19*) Exemples :

Mettre sous forme polaire $\alpha = e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{7\pi}{5}}$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ et } \varphi = \frac{7\pi}{5}$$

$$\frac{\theta + \varphi}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{5\pi + 28\pi}{20} \right) = \frac{33\pi}{40}$$

$$\frac{\theta - \varphi}{2} = \frac{5\pi - 28\pi}{40} = -\frac{23\pi}{40}$$

$$\text{Donc } \alpha = 2 \cos\left(-\frac{23\pi}{40}\right) e^{i\left(\frac{33\pi}{40}\right)}$$

(20) Exercice :

➡ Mettre sous forme polaire $-1 + e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $-1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$.

3.2 Linéarisation d'un produit de fonctions trigonométriques

Linéariser un produit du type $f(x) = \sin^n(x) \cos^m(x)$ avec n et m dans $\mathbb{N}$ consiste à exprimer $f(x)$ comme une somme de fonctions du type : $f(x) = \lambda \cos(kx) + \mu \sin(kx)$ avec λ et μ réels et $k \in \mathbb{N}$.

Pour cela, on utilise les formules d'Euler : $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Cette opération permet d'intégrer toute fonction de la forme de $f(x)$, elle permet aussi de calculer simplement ses dérivées successives.

(21*) : Exemples et applications

$$\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} (e^{3ix} + e^{-3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix}) = \frac{1}{8} (e^{3ix} + e^{-3ix} + 3(e^{ix} + e^{-ix})) = \frac{1}{8} (2 \cos 3x + 6 \cos x) = \frac{1}{4} (\cos 3x + 3 \cos x)$$

$$\sin^4 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^4 = \frac{1}{16} (e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}) = \frac{1}{16} (2 \cos 4x - 8 \cos 2x + 6) = \frac{1}{8} (\cos 4x - 4 \cos 2x + 3)$$

(22) Exercices

Linéariser $\cos^5(x)$ et $\sin^3(x)\cos(x)$

4. L'équation algébrique de degré deux

(23*) propriété :

Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées complexes opposées (alors que dans $\mathbb{R}$, un réel admet soit une soit aucune racine carrée réelle).

(24) : Méthode d'extraction des racines carrées d'un nombre complexe.

Soit $\omega = 8 + 6i$, on cherche x et y dans $\mathbb{R}$ tels que $(x + iy)^2 = \omega$

$$(x + iy)^2 = \omega \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = 8 + 6i$$

$$\text{On sait aussi que } |\omega| = |(x + iy)^2| = |x + iy|^2 = x^2 + y^2$$

Ainsi x^2 et y^2 sont solutions du système linéaire :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \operatorname{Re}(\omega) = 8 \\ x^2 + y^2 = |\omega| = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X - Y = 8 \\ X + Y = 10 \end{cases}$$

On résout par combinaison linéaire :

$$2x^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 = 9$$

$$2y^2 = 2 \Leftrightarrow y^2 = 1$$

Donc $x = \pm 3$ et $y = \pm 1$ mais $2xy = 6$ donc $xy > 0$

Donc $x = 3$ et $y = 1$ convient et $x = -3$ et $y = -1$ convient.

Les racines carrées de $\omega = 8 + 6i$ sont donc $\pm(3 + i)$.

Remarques :

- $z^2 = \omega \Leftrightarrow \overline{z}^2 = \overline{\omega}$ si l'on a extrait les racines de ω , il suffit de les conjuguer pour obtenir celles de $\overline{\omega}$.
Exemple : les racines carrées de $8 - 6i$ sont $\pm(3 - i)$
- $z^2 = \omega \Leftrightarrow i^2 z^2 = -\omega \Leftrightarrow (iz)^2 = -\omega$, si l'on a extrait les racines de ω , il suffit de les multiplier par i pour obtenir celles de $-\omega$. Exemple : les racines de $-8 + 6i$ sont $\pm(1 + 3i)$.

(25) l'extraction des racines carrées de en résumé

On recherche une racine carrée de ω sous la forme $x + iy$ avec x et y réels.

- On commence par calculer x^2 et y^2 qui sont solutions du système linéaire suivant :
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \operatorname{Re}(\omega) \\ x^2 + y^2 = |\omega| \end{cases}$$
- On en déduit 4 couples de solutions (x, y) et comme $2xy = \operatorname{Im}(\omega)$, on ne retient que les deux couples (x, y) tels que le signe de xy soit celui de $\operatorname{Im}(\omega)$.

Commentaire : quand ω est réel négatif cette méthode est inutile, les racines valent $\pm i\sqrt{|\omega|}$.

(26) Méthode de résolution l'équation algébrique du second degré dans $\mathbb{C}$:

$$(E) az^2 + bz + c = 0 \text{ où } a \in \mathbb{C}^*$$

- Calcul de $\Delta = b^2 - 4ac$
- Extraction d'une racine δ de Δ ($\delta^2 = \Delta$), cf. (24*)
- Les racines de l'équation sont données par $z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$

Remarques. Si $\Delta \neq 0$, peu importe la racine que l'on choisit puisque les 2 racines de Δ sont opposées et que les solutions s'écrivent avec $-\delta$ et δ . Si $\Delta = \delta = 0$, (E) n'a qu'une racine, qui vaut $\frac{-b}{2a}$ comme c'était déjà le cas pour les équations du second degré dans $\mathbb{R}$.

(27*) exemples :

$$\text{Résolvons : } z^2 = -(1+i)z + 2(1+i) = 0 \quad \Delta = (1+i)^2 - 4 \times 2(1+i) = -8 - 6i$$

On vient de calculer les racines de $8 + 6i$ qui sont $\pm(1 + 3i)$ donc :

$$\sqrt{\Delta} = \pm(-1 + 3i)$$

$$\text{Formule de Viète : } z_{1,2} = \frac{-b \pm \delta}{2a}, \text{ choisissons } \delta = -1 + 3i$$

$$z_1 = \frac{1+i-1+3i}{2} = 2i \quad z_2 = \frac{1+i+1-3i}{2} = 1-i$$

$$\text{Résolvons } 2z^2 - 3z + 2 = 0 :$$

$$\Delta = -7. \text{ Les racines carrées sont } \pm i\sqrt{7} \text{ posons } \delta = i\sqrt{7}, z_1 = \frac{3+i\sqrt{7}}{4} \text{ et } z_2 = \frac{3-i\sqrt{7}}{4}$$

(28) exercices :

Résoudre dans les équations algébriques suivantes:

$$1) 3 + i(z^2) - (8 + 6i)z + 25 + 5i = 0$$

$$2) z^2 - 5z + 3 + 10i = 0$$

5. Racines n-ièmes de l'unité

(29) définition :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, une racine n-ième de l'unité, et z , un nombre complexe tel que $z^n = 1$.

(30) racines n-ièmes de l'unité :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe exactement n racines n-ièmes de l'unité qui sont les $\omega^k = e^{\frac{2i\pi}{n}k}$, avec $0 \leq k \leq n-1$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

(31*) exemple :

Les racines cubiques et quatrième de l'unité.

D'après (30), les solutions de $z^3 = 1$ sont les $(e^{\frac{2i\pi}{3}})^k = e^{\frac{2ik\pi}{3}}$ avec $0 \leq k \leq n-1$ donc $0 \leq k \leq 2$

Il y a donc 3 solutions :

$$e^{i0} = 1 \quad e^{\frac{2i\pi}{3}} \quad e^{\frac{4i\pi}{3}}$$

Pour $n = 4$, $\omega = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ses puissances s'écrivent :

$$\omega^0 = 1$$

$$\omega^1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$\omega^2 = e^{i\pi} = i^2 = -1$$

$$\omega^3 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = i^3 = -i$$

(32*) remarque :

Puisque pour tout $0 \leq k \leq n-1$, ω^k est de module 1 et d'argument $\frac{2k\pi}{n}$, les images des racines n-ièmes de

l'unité sont réparties régulièrement sur le cercle unité $i.e$. Elles forment un polygone régulier à n côtés en partant du point d'affixe 1.

(33) Somme des racines n-ième :

On calcule la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $\omega \neq 1$ et de premier terme 1. La somme des premiers termes d'une suite géométrique est donnée par l'expression :

$$\text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

$$\text{On a l'égalité : } 1 + \omega + \dots + \omega^{n-1} = \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega}$$

(34) somme des racines n-ièmes de l'unité :

$$\text{Soit } n \geq 2 \text{ et } \omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}, \text{ on a } 1 + \omega + \dots + \omega^{n-1} = 0$$

(35*) preuve.

$$(35) : \text{Puisque } n \geq 2, \frac{2\pi}{n} \text{ n'est pas multiple de } 2\pi, \omega = e^{i\frac{2\pi}{n}} \neq 1 \text{ et } 1 + \omega + \dots + \omega^{n-1} = \frac{1 - (e^{i\frac{2\pi}{n}})^n}{1 - \omega} = \frac{1 - e^{i2\pi}}{1 - \omega} = 0$$

(36) périodicité. La suite est n-périodique car $\omega^n = 1$. Par exemple, la suite commence par la séquence ...

6. Résolution de $z^n = \alpha$ avec z et complexes et n

(37) racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul. Tout nombre complexe non nul admet exactement n racines n-ièmes. Si z_0 désigne l'une quelconque d'entre elles, la liste des racines n-ièmes de α s'écrit où ω est une racine n-ième de l'unité.

(38*) preuve.

$$(38) : \text{Puisque } z_0^n = \alpha, z^n = \alpha \Leftrightarrow z^n = z_0^n \Leftrightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1 \text{ donc } \frac{z}{z_0} \text{ est racine n-ième de l'unité.}$$

$$\frac{z}{z_0} = \omega^k \text{ avec } 0 \leq k \leq n-1 \text{ d'où le résultat annoncé.}$$

Trouvez z_0 tel que $z_0^n = \alpha$ se fait sous forme POLAIRE, si $re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et

$$\text{alors } z_0 = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} \text{ convient.}$$

(40) : $-1 = e^{i\pi}$ donc $z_0 = 1^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\pi}{3}}$ est racine cubique de -1, il suffit de le multiplier par $\omega^0, \omega^1, \omega^2$ avec

$$w = e^{i\frac{2\pi}{3}} = j. \text{ Donc } w^0 = 1, w^1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}, w^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}.$$

Les racines cubiques de -1 sont $e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)}, e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)}$.

$2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$, $z_0 = 2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\pi}{8}}$ est racine 4ème de $2i$. Reste à multiplier par w^0, w^1, w^2, w^3 avec

$$w = e^{i\frac{2\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i, w^0 = 1, w^1 = i, w^2 = -1, w^3 = -i$$

Remarque : Les racines 4ème de l'unité sont $1, i, -1, -i$.

(45) : $\Delta_p \neq 0$ (λ, μ) est donné par le système

$$\begin{cases} u_0 = \lambda + \mu \\ u_1 = \lambda r_1 + \mu r_2 \end{cases} \text{ dont le déterminant est } r_2 - r_1 \neq 0$$

$\Delta_p = 0$ (λ, μ) est donné par le système :

$$\begin{cases} u_0 = \lambda \\ u_1 = \lambda r_0 + \mu r_0 \end{cases} \text{ le déterminant est } r_0 \neq 0$$

(47) : $(\Gamma) U_{n+2} = (1+i)U_{n+1} - 2(1+i)U_n$ avec $u_0 = 0$ $u_1 = 1$

La caractéristique est $x^2 - (1+i)x + 2(1+i)$, les racines ont été calculées en (27).

$r_1 = 2i$ $r_2 = 1-i$ solutions de la forme $(\lambda(2i)^n + \mu(1-i)^n)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mu \in \mathbb{C}$.

Les conditions initiales donnent : $\begin{cases} 0 = \lambda + \mu \\ 1 = 2i\lambda + (1-i)\mu \end{cases} \quad \mu = \frac{1}{1-3i} = \frac{1+3i}{10} = -\lambda$

$$U_n = \frac{1+3i}{10}(-(2i)^n + (1-i)^n)$$

$(\Gamma) U_{n+2} = 2(1+i)U_{n+1} - 2iU_n$ et $u_0 = 2$ et $u_1 = 3$, la caractéristique est $x^2 - 2(1+i)x + 2i$.

$\Delta = 4(A+i)^2 - 8i = 0$ $r_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{2(1+i)}{2} = 1+i$, solutions de forme $((\lambda + n\mu)(1+i)^n), (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$

Les conditions initiales donnent $\begin{cases} 2 = \lambda \\ 3 = (2 + \mu)(1+i) \end{cases}$

$$\mu = \frac{3}{1+i} - 2 = \frac{3-2-2i}{1+i} = \frac{1-2i}{1+i} = \frac{(1-2i)(1-i)}{2} = \frac{1-i-2i-2}{2} = \frac{-1-3i}{2}$$

$$U_n = \left(2 + n \left(\frac{-1-3i}{2} \right) \right) (1+i)^n$$

$(\Gamma'') U_{n+2} = -2\sqrt{3}U_{n+1} - 4U_n$ avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 2$, $P = x^2 + 2\sqrt{3}x + 4$, $\Delta = 12 - 16 < 0$, $\delta = 2i$

$r_1 = \frac{-2\sqrt{3}+2i}{2} = -\sqrt{3}+1$ $r_2 = \bar{r}_1$, sous forme polaire $r_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ et $r_2 = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

Les solutions sont de la forme $2^n \left(A \cos^n \frac{5\pi}{6} + B \sin^n \frac{5\pi}{6} \right)$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

A, B sont données par $\begin{cases} u_0 = A \\ u_1 = p(A \cos \theta + B \sin \theta) \end{cases}$ le déterminant vaut $p \sin \theta \neq 0$

$$\begin{cases} 0 = A \\ 2 = \cancel{2} B \frac{1}{2} U_n = 2^n \times 2 \sin^n \frac{5\pi}{6} = 2^{n+1} \sin^n \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

Chapitre 2 : Logique et ensemble

(50) : 2 est un entier impaire est une assertion.

$$e < \pi$$

(51) : 2 est un entier impaire **FAUX**

$$e < \pi \text{ **VRAI**}$$

(52) : Négation : Soit NON soit $\neg$

Conjonction : Soit ET soit $\wedge$

Disjonction : Soit OU soit $\vee$

(53) :

A	B	$\overline{A} \vee B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(57) : $A \wedge B = B \wedge A$ $A \vee B = B \vee A$ commutativité

$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C) = A \vee B \vee C$ associativité du $\vee$ (idem pour $\wedge$)

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$A \vee A = A \quad A \wedge A = A \text{ idempotence}$$

$$A \vee \overline{A} = 1 \text{ tiers exclu}$$

$$A \wedge \overline{A} = 0 \text{ non contradiction}$$

(59) : $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$

$$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$$

(60) : $\overline{A \Rightarrow B} = \overline{\overline{A} \vee B} = \overline{\overline{A}} \wedge \overline{B} = A \wedge \overline{B}$

Utile pour démontrer que $A \Rightarrow B$ est faux

(63) : On passe par la contraposée :

(65) : « x est pair » prédicat sur $\mathbb{Z}$
« $1 + x^2 = 0$ » prédicat sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

(67) : $\forall$ veut dire pour tout

(68) : $\exists$ veut dire il existe au moins un

(69) : $\exists z \in \mathbb{C} \quad z^2 = -1$ VRAI i et $-i$

(70) : Négation de $\forall x \in E, A(x)$ $\exists x \in E, \overline{A}(x)$
Négation de $\exists x \in E, A(x)$ $\forall x \in E, \overline{A}(x)$

(71) : $\forall (U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \Rightarrow U_{n+1} \geq U_n$ FAUX
Traduction : Toutes les suites à valeurs réelles sont croissantes à partir d'un certain rang.

Sa négation : $\exists (U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \quad ET \quad U_{n+1} < U_n$ VRAI

(75) : $\{x \in \mathbb{Z}, a \leq x \leq b\} = \{a, \dots, b\} = \llbracket a, b \rrbracket$
 $\{x \in \mathbb{Z} / \exists k \in \mathbb{Z}, x = 11k\} = \{11k, k \in \mathbb{Z}\} = 11\mathbb{Z}$

(77) : $E = \{1, 2, 3\} \quad F = \{a, b\} \quad E \times F = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$
Si $E = \mathbb{R}^- \quad F = \mathbb{R}^+$ en assimilant les couples aux points du plan, on obtient le 2ème quadrant
 $Q_2 = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}^- \text{ et } y \in \mathbb{R}^+\}$
Si $E = F = \mathbb{R} \quad E \times F = \{(x, y) | x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$

(79) : $E = \{1, 2, 3\} \quad F = \{a, b\}$
 $G_1 = \{(1, a), (1, b)\} \quad G_2 = \{(2, a), (2, b)\}$ sont des graphes de E dans F
 $E = F = \mathbb{R} \quad H = \{(x, x^2), x \in \mathbb{R}\}$ est un graphe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

(81) : G_1 n'est pas application car pour $x = 2$, il n'y a pas de (x, y) dans G_1 , et pour $x = 1$,
 $(x, y) \in G_1$ n'est pas unique
 $\{(1, b), (2, a), (3, b)\}$ est applicatif
Si $E = F = \mathbb{R} \quad E \times F = \{(x, y) | x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$

(84) : $E = \{1, 2, 3\} \quad F = \{a, b, c\}$
 $1 \rightarrow a$
 $2 \rightarrow a$
 $3 \rightarrow b$
b possède un antécédent, a possède deux antécédents et c n'en a pas

(86): $E = [1, 2, 3, 4]$ $F = \{a, b, c, d, h\}$

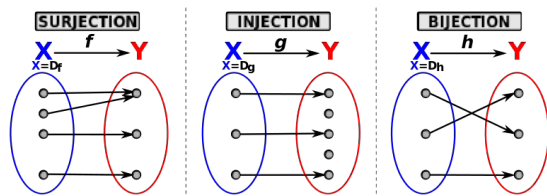
$f: E \rightarrow F$ définie par $Gp = \{(1, b), (2, b), (3, c), (4, h)\}$

Si $A = \{1, 2, 3\}$ $f(A) = \{f(x), x \in \{1, 2, 3\}\} = \{b, c\}$

Si $E = \mathbb{R}$ $F = \mathbb{R}^+$ soit $g: E \rightarrow F$ définie par le graphe $G_g = \{(x, x^2), x \in \mathbb{R}\}$

$A = [-1, 1]$ $g(A) = \{g(x), x \in [-1, 1]\} = [0, 1]$

(92):



(94):

Soit

$g: A = [-2, 2] \rightarrow g(A), x \rightarrow 7x^2$ $g(A) = \{7x^2, x \in [-2, 2]\}$

$b \in [0, 2]$, cherchons

l'ensemble des x antécédents de b par g dans A , ils

vérifient $g(x) = b \Leftrightarrow 7x^2 - b = 0, b \geq 0$

Donc $b = (\sqrt{b})^2$.

Les x solutions sont $\sqrt{\frac{b}{7}}$ et $-\sqrt{\frac{b}{7}}$

Puisque $b \leq 28$, $\frac{b}{7} \leq 4$ et $\sqrt{\frac{b}{7}} \leq 2$. Donc $-\sqrt{\frac{b}{7}} \geq -2$, les x solutions sont bien dans A .

On a trouvé 2 antécédents dans A , g est surjective mais pas bijective.

(95): On définit la tangente hyperbolique (th) $\mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$, $x \rightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Soit $y \in]-1, 1[$, résolvons $th(x) = y$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = y(e^x + e^{-x})$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - 1 = y(e^{2x} + 1)$$

$$\Leftrightarrow e^{2x}(1 - y) = y + 1$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \quad |y| < 1 \quad \text{donc} \quad \frac{1+y}{1-y} > 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+y}{1-y} \right)$$

On peut donc définir la réciproque ainsi :

$$\arg th :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}, y \rightarrow \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+y}{1-y} \right)$$

(98): Soit R , définie sur $\mathbb{R}^2$ par $xRy \Leftrightarrow x^2 = y^2$. Vérifions qu'elle est **réflexive, symétrique et transitive**.

$R: xRx \Leftrightarrow x^2 = x^2$

$$S: xRy \Leftrightarrow yRx: x^2 = y^2 \Leftrightarrow y^2 = x^2$$

$$T: x^2 = y^2 \text{ et } y^2 = z^2 \Rightarrow x^2 = z^2$$

Soit E , un ensemble et $P(E)$, l'ensemble de ses parties,, considérons C .

$$R: \forall A \in P(E), A \subset A$$

$$AS: \forall (A,B) \in P^2(E), A \subset B \text{ et } B \subset A \Rightarrow A = B$$

$$T: \forall (A,B,C) \in P^2(E), A \subset B \text{ et } B \subset C \Rightarrow A \subset C$$

(100): $(\mathbb{N}, \leq)$ est totalement ordonné

S, E a plus de 2 éléments l'ordre C sur $P(E)$ n'est pas total.

Si a et b sont 2 éléments distincts de E , $\{a\}$ et $\{b\}$ ne sont pas comparables car on n'a ni $A \subset B$ ni $B \subset A$, l'ordre est partiel.

(101): Soit $f: E \rightarrow F$, la relation définie sur E^2 par $xRy \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ est récursif, symétrique et transitif.

$$\text{Sur } \mathbb{R}^2: x\rho y \Leftrightarrow (xy > 0 \text{ ou } x = y)$$

(103): Egalité des carrés $x_0^2 = y^2 \Leftrightarrow (x_0 - y)(x_0 + y) = 0$

$$\overline{x_0} = \{-x_0, x_0\}$$

$$\text{Pour } \rho \quad \overline{x_0} = \{y \in \mathbb{R} \mid x_0 y > 0 \text{ ou } x_0 = y\}$$

$$\text{Si } x_0 > 0 \quad \overline{x_0} = \mathbb{R}^{+*}$$

$$\text{Si } x_0 < 0 \quad \overline{x_0} = \mathbb{R}^{-*}$$

$$\text{Si } x_0 = 0 \quad \overline{x_0} = \{0\}$$

Chapitre 4 : Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

(106): lemme: $a \mid b$ et $b \mid a$ si et seulement si $a = \pm b$ $a = qb$ et $b = pa$ donc $a = qpa$ et $qp = 1$

$$\text{Si } q = p = 1 \text{ alors } a = b \quad \text{si } q = p = -1 \text{ alors } a = -b$$

Si $Da = Db$ alors $a \in Da = Db$ donc $a \mid b$ o prouve de même que $b \mid a$ donc $a = \pm b$

Si $a = \pm b$, il est claire que $a \mid b$ et $b \mid a$ donc tout diviseur de a divise b et tout diviseurs de b divise a

(110): $a = r[b]$ donc $\exists q \in \mathbb{Z}: a - r = bq \Leftrightarrow a = bq + r$ avec $b \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq r < b$ d'après (107), q et r sont le quotient et le reste dans la division de a par b .

(111): Nous allons utiliser la transitivité de $\equiv [n]$

$$\text{Elle s'écrit } a \equiv b[n] \text{ et } b \equiv c[n] \Rightarrow a \equiv c[n]$$

$$\text{Exemples: } 2 \equiv 10[4] \quad 2 \equiv -2[4]$$

(112) : Chiffre des unités de 3^{12}

$$81 = 3^2 3^2 \text{ donc } 3^4 \equiv 1[10] \text{ et donc } 3^{12} \equiv 1^3[10]$$

Résoudre $3x \equiv 4[5]$

x[5]	0	1	2	3	4
3x[5]	0	3	1	4	2

Donc les solutions sont $x \equiv 3[5]$

COURS A RATTRAPER

(141) : $P(x) = (2, 1, 0, 3, -1, 0...)$ $\lambda P(x) = (2\lambda, \lambda, 0, 3\lambda, -\lambda, 0...)$
 $Q = x^2 - 5x^3$ $S = 1 - x$ $Q = (0, 0, 1, -5, 0...)$ $S = (1, -1, 0...)$
 $Q + S = (1, -1, 1, -5, 0, 0...)$

(142) : $(x - a)(x - \bar{a}) = x^2 - (a + \bar{a})x + a\bar{a} = x^2 - 2\operatorname{Re}(a)x + |a|^2$
 $a = i : (x - i)(x + i) = x^2 + 1$
 $a = j : (x - j)(x - \bar{j}) = x^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)x + |j|^2 = x^2 + x + 1$
 $a = -j : (x + j)(x + \bar{j}) = x^2 - x + 1$
 $a = e^{i\frac{\pi}{4}} : \left(x - e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(x - e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = x^2 - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x + 1 = x^2 - \sqrt{2}x + 1$

(144) : $P = 3x + 2x^2 - x^3$ $P = (0, 3, 2, -1, 0...)$ $\operatorname{val} P = 1$ $\deg P = 3$
 $Q = (x + 1)^4 - 1 - x^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 - 1 - x^4$
 $= 4x + 6x^2 + 4x^3$

(145) : 1) $P = x^2 + 1$ $Q = x^3 + 2$ $PQ = (x^2 + 1)(x^3 + 2) = 2 + 2x^2 + x^3 + x^5$ $\deg PQ = 5$
2) $P = -x^2 + x + 1$ $Q = x^2 - x + 1$ $P + Q = 2$ $\deg P + Q = 0$
3) $P = x^2 + x$ $Q = x^4 + 1$ $P + Q = x^4 + x^2 + x + 1$ $\deg = \max(\deg P, \deg Q)$
4) $P = 0$ $\deg Q = n$ $\deg PQ = \deg 0 = -\infty + n = -\infty$ $\deg(P + Q) = \max(-\infty, n) = n$

(147) : $\forall (P, Q) \in IK^2[X]$ $\deg PQ = \deg P + \deg Q$
Donc $(\deg P \geq 0 \text{ et } \deg Q \geq 0) \Rightarrow \deg PQ \geq 0$ qui donne :
 $(P \neq 0 \text{ et } Q \neq 0) \Rightarrow PQ \neq 0$ c'est la contraposée de (147)

(149) : $x^4 + x = x(x^3 + 1)$ $x^4 + x = (x + 1)$
 $x^4 + x$ est divisible par $x, x^3 + 1, x + 1, x^2 - x - 1$ et leurs associés :
 $2(x^3 + 1)$ $\frac{1}{7}(x + 1)$ $8(x^2 - x - 1)$

(150) : Associés : $2x^2 + x + 1 \sim x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad -\frac{3}{4} \sim 1 \quad \frac{1}{7}(x^4 + 1) \sim x^4 + 1$

($\Leftarrow$) on suppose $\exists \lambda \in IK^* \quad A = \lambda B$ alors $A \mid B$ et $B \mid A$

($\Rightarrow$) si $A = 0$ alors $A = B = 0$

Si $A \neq 0$ alors $A(1 - Q_1 Q_2) = 0$ donne $Q_1 Q_2 = 1$ or $\mathbb{K}[X]$ est intègre comme

$\deg Q_1 Q_2 = \deg Q_1 + \deg Q_2 = 0$, on a $\deg Q_1 = \deg Q_2 = 0$, Q_1 et Q_2 sont dans $\mathbb{K}^*$

$Q_1 \in \lambda \in \mathbb{K}^*$ et $A = \lambda B$

(152) : La division euclidienne de $x^2 - 2x + 1$ par $x - 3$ à pour quotient $x + 1$, et pour reste 4.

La division de $x^4 + x^2 + x + 2$ par $x^2 + 4$, à pour quotient $x^2 - 3$, et pour reste $x^2 + 14$

(153) : D'après (151), $\exists!(Q, R) \in \mathbb{K}^2[X] : P = (x - a)Q + R$ et $\deg R < 1$

R est une constante que l'on calcule en évaluant les 2 membres en a . $P(a) = R$

(154) : Si $P \sim Q$, $P = \lambda Q$ avec $\lambda \in IK^*$ et $D_P = D_Q$ par définition de la divisibilité :

Si $D_P = D_Q$, on a $P \mid Q$ (car $P \mid P$) et $Q \mid P$ (car $Q \mid Q$), d'où $P \sim Q$.

(157) : $-(x - 1) \wedge (x^2 - 1) = x - 1$ car $x - 1$ est le diviseur unitaire de plus haut degré de $x - 1$ et qu'il divise $x^2 - 1$

$$-B = 0 \quad 2x^2 + x + 1 \wedge 0 = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$-(x - 1) \wedge (x^2 + 1) = 1$ car $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$ donc A et B n'ont pas d'autres diviseurs communs que les constantes non nulles.

(159) : Le reste est une constante non nulle il existe $R'_3 \mid R'_2$ et on s'arrête car le reste suivant sera nul.

$$(161) : -\frac{3}{4} = R'_1 - R'_2 Q'_3 = R'_1 - (R'_0 - R'_1 Q'_2) Q'_3 = R'_1 (1 + Q'_2 Q'_3) - R'_0 Q'_3$$

$$1 = A' \underbrace{\left(\frac{4}{3} Q'_3 \right)}_{U'} + B' \underbrace{\left(-\frac{4}{3} (1 + Q'_2 Q'_3) \right)}_{V'} \quad U' = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \quad V' = \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$$

(164) : Effectuons la division de P par $x - a$.

$P = (x - a)Q + P(a)$ d'après (153). Donc $(x - a) \mid P$ si et seulement si le reste de la division est

nul : $(x - a) \mid P \Leftrightarrow P(a) = 0$

(166) : Si $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ ($\deg P \neq -\infty$) alors le nombre de racine de P est majoré.

La contraposée s'énonce : si le nombre de racines de P n'est pas majoré alors $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$

(167) : C'est faux dans $\mathbb{R}[X]$, il suffit de prendre un trinôme avec $\Delta < 0$

(168) : Récurrence sur $n \geq 1$

Clair au rang 1.

On suppose HR_n vrai au rang n . On prend P de degré $n+1$.

D'après (167), P admet une racine z_{n+1} dans $\mathbb{C}$ donc $\exists Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = (X - z_{n+1})Q$, comme $\deg Q = n$, on

déduit de HR_n que $Q = \lambda \prod_{k=1}^{n+1} (X - z_k)$.

(169) : Faux dans $R[X]$. Exemple : $x^2 - x + 1$ pas scindé sur $\mathbb{R}$. $\Delta = -3$, ni aucun de ses multiples.

(170) : $P = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$ $P(1) = 0$ donc $(x-1) \mid P$ la division donne $P = (x-1)(x^3 - x^2 + x - 1)$. 1

est la racine du 2ème facteur $x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2 + 1)$.

Donc $P = (x-1)^2(x^2 + 1)$. 1 n'est pas racine de $x^2 + 1$, 1 est d'ordre 2

(171) : m = nombres de racines M = nombres de racines comptées avec l'ordre

$P = (x+1)(x-2)^2$, $m = 2$, $M = 3 = n$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

$Q = (x^2 + 1)(x-2)^2(x+1)$

Dans $\mathbb{R}$: $m = 2$ $M = 3 < n = 5$

Dans $\mathbb{C}$ $Q = (x+i)(x-i)(x-2)^2(x+1)$ $m = 4$ $M = 5 = n$

Dans $\mathbb{C}[X]$, le résultat est général

(172) : $P = x^6 + x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x + 1$

$P(i) = i^2 + 1 + 3 - 2i - 3 + i + 1 = 0$

$P'(i) = 6i + 5 - 12i - 6i + 6i + 1 = 0$

$P''(i) = 30 - 20i - 36 + 12i + 6 = -8i \neq 0$, i est d'ordre 2.

(173) : $Q(x) = 2x^2 - x + 1$,

$Q(j) = 2j^2 - j + 1 = 2\bar{j} - j + 1$

$\overline{Q(j)} = 2j - \bar{j} + 1$

$Q(\bar{j}) = 2(\bar{j})^2 - \bar{j} + 1 = 2\bar{j}^2 - \bar{j} + 1 = 2\bar{j} - \bar{j} + 1 = 2j - \bar{j} + 1$

(174) : $P = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$, on montre facilement que $P(-j) = P'(-j) = 0$

$P''(-j) \neq 0$, $-\bar{j}$ est aussi d'ordre 2 et $P = (x+j)^2(x+\bar{j})^2$

$P''(-j) \neq 0$, $-\bar{j}$ est aussi d'ordre 2 et $P = (x+j)^2(x+\bar{j})^2$

(175) : $x^2 + 1$ n'est pas irréductible sur $\mathbb{C}$ car divisible par $x-i$ et $x+i$

Il l'est sur $\mathbb{R}$ car sinon, il admettrait un diviseur de degré 1 et une racine réelle ce qui est impossible car $\Delta = -4$

(177) : $P = x^4 - x^3 + x - 1$. 1 et -1 sont des racines évidentes.

$P = (x-1)(x+1)(x^2 - x + 1)$, $\Delta_{x^2-x+1} = -3$. Donc $x^2 - x + 1$ est irréductible et la décomposition sur $R[X]$ est finie.

$x^2 - x + 1 = (x+j)(x+\bar{j})$, la décomposition, sur $\mathbb{C}$ s'écrit :

$$P = (x-1)(x+1)(x+\bar{j})(x+j)$$

(178) : On utilise $(x-a)(x-\bar{a}) = x^2 - 2\operatorname{Re}(a)x + |a|^2$

$$x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x-i)(x+i) = (x^2+1)(x-1)(x+1) \text{ sur } \mathbb{R}$$

Décomposons $Q = x^5 - x^3 - 4x^2 - 3x - 2$ sur $\mathbb{C}$ puis $\mathbb{R}$ sachant que $Q(2) = 0$ et $Q(j) = 0$

$$Q = (x-2)(x^4 + 2x^3 + 2x + 1) = (x-2)S(x)$$

$S(j) = 0$ donc $S(\bar{j}) = 0$ et j et $\bar{j}$ sont de même ordre.

$$S'(j) = 4 + 6j^2 + 6j + 2 = 6 + 6(\bar{j} + j) = 6 + 6(2\operatorname{Re}(j)) = 6 - 6 = 0$$

$$S''(j) = 6(2j^2 + 2j + 1) = 6(2(2\operatorname{Re}(j)) + 1) = -6 \neq 0, j \text{ est d'ordre } 2 \text{ comme } \bar{j}$$

S est unitaire de degré 4, $S = (x-j)^2(x-\bar{j})^2$

$$Q = (x-2)(x-j)^2(x-\bar{j})^2 \text{ sur } \mathbb{C}$$

On sait que $(x-j)(x-\bar{j}) = x^2 + x + 1$, donc $Q = (x-2)(x^2 + x + 1)^2$ sur $\mathbb{R}$

(183) : $F = \frac{x^3 + x + 1}{x + 2}$ on effectue la division euclidienne.

$$F = \underbrace{(x^2 - 2x + 5)}_{\text{partie entiere}} - \underbrace{\frac{9}{x+2}}_{\text{partie polaire}}$$

$$(184) : F = \underbrace{\frac{x^2+1}{x}}_{\text{partie entiere}} + \underbrace{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x+1} + \frac{4}{(x+1)^2} + \frac{5}{(x-1)^2}}_{\text{partie polaire}}$$

0 est pole d'ordre 3, $\frac{1}{2}$ est d'ordre 1, $\frac{2}{x^3}$ est d'ordre 3.

-1 est de pole d'ordre 2, $\frac{3}{x+1}$ est d'ordre 1, $\frac{4}{(x+1)^2}$ est d'ordre 2.

1 est pole d'ordre 2, $\frac{5}{(x-1)^2}$ est d'ordre 2.

L'ordre du pole est égal au plus grand des ordres des éléments simples associés à ce pôle.

L'élément simple de même ordre que le pole a nécessairement un coefficient non nul, on l'appelle élément d'indice maximum.

(185) :

$$a) \frac{x^3 - x - 1}{x(x+1)} = x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$$

$$b) \frac{x^2 - x - 1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$c) \frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}}{x-i} - \frac{\frac{1}{2}}{x+i}$$

$$d) \frac{x}{x^2 - x + 1} = \frac{2\sqrt{3}}{x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{i}{2\sqrt{3}}}{x + -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

(187) :

$$a) P = x^3 - x - 1 \quad Q1 = x \quad P(-1) = -1 \quad Q1(-1) = -1 \quad \frac{P(-1)}{Q(-1)} = 1$$

$$c) \text{Coefficient associé à } -1 \quad P = x+1 \quad P(-i) = -i+1 \quad Q1 = (x-1)(x-i) \\ Q1(-i) = (-i-1)(-2i) = 2i(1+i)$$

$$\frac{P(-i)}{Q(-i)} = \frac{1-i}{2i(1+i)} = \frac{-i(1-i)^2}{4} = \frac{-i(1-2i-1)}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$(188) : F = \frac{x^2 + x - 1}{x(x+1)^2} \quad \deg F = -1 < 0 \text{ Donc, } E = 0, F \text{ est de la forme } F = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$$

$$0 \text{ poles simples } Q1(0) = 1 \quad P(0) = -1 \quad a = \frac{P(0)}{Q(0)} = -1$$

$$\text{Pour } C \quad (x+1)^2 F = \frac{-(x+1)^2}{x} + b(x+1) + c$$

$$\frac{x^2 + x - 1}{x} = \frac{-(x+1)^2}{x} + b(x+1) + c$$

$$\text{En } -1 \quad \frac{-1}{-1} = 0 + 0 + c \quad c = 1$$

$$F = -\frac{1}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} \quad \text{en } -1, \text{ on a } \frac{1}{2^2} = -1 = -1 + \frac{b}{2} + \frac{1}{4} \quad b = 2$$

On $\otimes$ par $x+1$ et on passe à la limite en $+\infty$

$$\frac{x^2 + x - 1}{x(x+1)} = -\frac{(x+1)}{x} + b + \frac{1}{x+1} \quad \text{à la limite : } 1 = -1 + b + 0 \quad b = 2$$

$$(189): G = \frac{4}{(x^2-1)^2} = \frac{4}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}$$

G est pair et la décomposition en éléments simples est unique.

$$G(-x) = \frac{a}{-x-1} + \frac{b}{(-x-1)^2} + \frac{c}{-x+1} + \frac{d}{(-x+1)^2} = \frac{-a}{x+1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{-c}{x-1} + \frac{d}{(x+1)^2}$$

L'unicité de la décomposition donne $-a = c$ et $b = d$

$$\text{Pour } b \text{ on } \otimes \text{ par } (x-1)^2 \text{ et on évalue en } 1, \frac{4}{(x+1)^2} = a(x-1) + b \frac{a(x-1)^2}{x+1} + \frac{b(x-1)}{(x+1)^2}$$

$$\text{En } 1, \text{ on a } \frac{4}{4} = b \quad b = 1$$

$$G = \frac{a}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{a}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} \quad \text{Si on } \otimes \text{ par } x \text{ et qu'on passe la limite, } a \text{ va s'éliminer mais } 0 \text{ n'est pas pôle}$$

donc on évalue en 0.

$$G(0) = 4 = -a + 1 - a + 1 \quad a = -1$$

$$G = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$(190): F = \frac{x-1}{(x+1)(x^2-2x+2)} = \frac{x-1}{(x+1)(x-(1-i))(x-(1+i))}, \text{ il y a 2 pôles simples non réels, il suffit de}$$

calculer $\frac{P(1+i)}{Q(1+i)}$ et de conjurer pour avoir l'autre.

$$F = -\frac{2}{5(x+1)} + \frac{\frac{1}{5} - \frac{i}{10}}{x-(1+i)}$$

(s'entraîner au calcul)

(191):

$$H = \frac{2x^2-4x-2}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2-4x-2}{(x-i)^2(x+i)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-i)^2} + \frac{c}{x+i} + \frac{d}{(x+i)^2}$$

H est dans $R(X)$ donc, d'après (190) $c = \bar{a}$, et $d = \bar{b}$.

$$H = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-i)^2} + \frac{c}{x+i} + \frac{d}{(x+i)^2}, \text{ la } \otimes \text{ par } (x-i)^2 \text{ donne } b \text{ et } \bar{b}.$$

$$\frac{2x^2-4x-2}{(x+i)^2} = a(x-i) + b + \frac{\bar{a}(x-i)^2}{x+i} + \frac{\bar{b}(x-i)^2}{(x+i)^2}, \text{ évaluons en } 1.$$

$$\frac{-2-4i-2}{-4} = b = \frac{-4(1+i)}{-4} = 1+i$$

La $\otimes$ par x et $x \rightarrow +\infty$ donnent :

$$\frac{x(2x^2 - 4x - 2)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{ax}{x-i} + \frac{(1+i)x}{(x-i)^2} + \frac{\bar{a}x}{x+i} + \frac{(1-i)x}{(x+i)^2}$$

$$0 = a + \bar{a}$$

Donc $a \in i\mathbb{R}$

$$H = \frac{a}{x-i} + \frac{1+i}{(x-1)^2} - \frac{a}{x+1} + \frac{1-i}{(x+1)^2}$$

0 n'est pas pole, on évalue en 0 .

$$-\frac{2}{1} = -\frac{a}{i} - (1+i) - \frac{a}{i} - (1-i) \Leftrightarrow -2 = -\frac{2a}{i} - 2 \quad a = 0$$

$$H = \frac{1+i}{(x-i)^2} + \frac{1-i}{(x+i)^2}, \text{ pas d'éléments simples d'ordre 1.}$$

(193) :

$$\frac{c}{x-a} + \frac{\bar{c}}{x-\bar{a}} = \frac{c(x-\bar{a}) + \bar{c}(x-a)}{x^2 - (a+\bar{a})x + a\bar{a}} = \frac{(c+\bar{c})x - (c\bar{a} + \bar{c}a)}{x^2 - 2\operatorname{Re}(a)x + |a|^2}$$

Le Δ du dénominateur vaut $4(\operatorname{Re}^2(a) - |a|^2) < 0$ car $a \in \mathbb{C} / \mathbb{R}$, la fraction calculée répond bien à (192).

Au final; $\frac{c}{x-a} + \frac{\bar{c}}{x-\bar{a}} = \frac{2\operatorname{Re}(c)x - 2\operatorname{Re}(c\bar{a})}{x^2 - 2\operatorname{Re}(a)x + |a|^2}$

(194) :

$$F = \frac{3x^2 - 6x + 21}{(x+2)(x^2 - 8x + 25)} = \frac{1}{x+2} + \frac{1-i}{x-(4+3i)} + \frac{1+i}{x-(4-3i)}$$

$$= \frac{1}{x+2} + \frac{2\operatorname{Re}(1-i)x - 2\operatorname{Re}((1-i)(4-3i))}{x^2 - 8x + 25} = \frac{1}{x+2} + \frac{2(x - \operatorname{Re}(4-3i-4i-3))}{x^2 - 8x + 25}$$

$$F = \frac{1}{x+2} + \frac{2(x-1)}{x^2 - 8x + 25} \text{ dans } R(X)$$