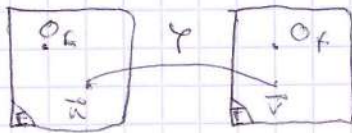


Ch 2: Applications linéaires = morphism



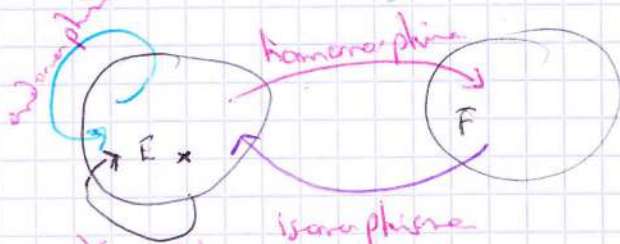
E et F K -ev
 $\text{card } P(E, F) = \text{card } P^{\text{card } E}$

$\vec{u} = f(\vec{v})$
 $f \in P(E, F)$ $\vec{v}$: appli linéaire f pour
 appli l de E à F

csq: $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$

csq: si l'image de $\vec{0}_E$ n'est pas $\vec{0}_F$
 l'appli n'est pas linéaire

csq: $f(CL \cdot \{v_i\}) = CL \cdot \{f(\vec{v}_i)\}$



La groupe linéaire de E

$\text{Id}_E = \text{Id}_{\text{lin}(E)}$ des E -linéarités

Δ Si 2 sev ont la même base $\Rightarrow$ identiques
 f sev $E \Rightarrow \dim f \leq \dim E$
 si f sev E et $\dim f = \dim E \Rightarrow f = E$
 $\forall v \in f$ sev de E , ses coordonnées dans
 sont des CL de ses p coordonnées de f

Règle d'une famille

Don un ensemble de dim n et $f = \{f_1, \dots, f_n\}$
 $\text{rg } f \rightarrow \dim$ du sev de f

$\text{rg } f = r = \dim \langle f \rangle = \dim \text{vect } f$
 $\rightarrow \text{rg } f \leq n$
 $\rightarrow \text{rg } f \leq \text{card } f$
 $\rightarrow$ si f libre alors $\text{rg } f \leq \text{card } f$

Pivot de Gauss

On ne change pas le rang de F
 $\rightarrow$ ajoutant 1 vecteur et d'autres
 $\rightarrow$ intervertissant 2 vecteurs
 $\rightarrow$ intermultipliant 1 vecteur par 1 scalaire $\neq 0$
 $\rightarrow$ Ech 2 coordonnées de Lueky

Dim du sev:

$p \leq m$ $n \in PCD(m, n)$
 $q \leq m$



$s = \dim(F \cap G) \leq \min(p, q)$
 $m \geq \dim(F + G) \geq \max(p, q)$
 Th des 4 dims:
 $\dim(F + G) = \dim f + \dim g - \dim f \cap g$

①

Ch 1: Espace Vectoriels

K : corps de nombres scalaires
 Propriété pour 2 lois $+$ et $\cdot$

$+$ est associative $a + (b + c) = (a + b) + c$
 $\exists$ neutre 0 tq $a + 0 = 0 + a = a$

$\forall a \in K$, $\exists$ symétrique de $a = -a$
 tq $a + (-a) = (-a) + a = 0$

$+$ est commutative $a + b = b + a$

$a, b \in K$ $a + b \in K \rightarrow$ LCI
 $a, b \in K$ assoc $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

distr $+$: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
 $\exists$ neutre 1 : $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$

inverse: $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$
 K commutatif ssi: $a \cdot b = b \cdot a$

$K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{Q}$ ou $F_n = \{0, 1\}$ et
 $\Rightarrow (0 + 0) + 0 = 0$ et ads (bin)

E est un K -ev ssi $E = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ au
 se est un vecteur avec 2 lois $+$ et $\cdot$
 avec $(E, +)$ groupe abélien comme $(K, +)$

B est base de E ssi libre et génératrice de E
 ex: $\{i, j, k\}$ base de $\mathbb{R}^3$

Dim de E cardinal de s base
 Ex: $\dim \mathbb{R}^3 = 3$

sous espace vectoriels (de E)

toute partie F de E qui soit aussi
 K -ev pour les mêmes lois que E

On note F sev de E
 $\mathbb{R}^2$ est sev de $\mathbb{R}^3$ $2 \subset 3$

Opé sur les sev:

E K -ev: f et G sev de E
 alors $F \cap G$ est sev de E
 $\rightarrow$ L'intersection de 2 sev est 1 sev

F et G sev de $E \Rightarrow \vec{0}_E \in F$ et $\vec{0}_E \in G$
 de, $\vec{0}_E \in F \cap G$ de $F \cap G \neq \emptyset$
 et $F \cap G$ est stable

$F + G$ est direct noté $F \oplus G$ si $F \cap G = \{0\}$
 ex: $\mathbb{R}^2 = \{0, x\} \oplus \{0, y\}$

Recherche de base $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$
 sev car: $\mathbb{R}^3$ est $\mathbb{R}$ -ev
 $\rightarrow A \neq \emptyset$ car $\vec{0}_3 = (0, 0, 0) \in A$
 $\rightarrow$ stable $\forall (x, y, z) \in A$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda(x, y, z) \in A$ car $\lambda x + \lambda y + \lambda z = \lambda(x+y+z) = \lambda \cdot 0 = 0$

$S = \{(u_n)\}$ ensemble des suites de terme u_n
 $+(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$
 $\cdot \lambda (u_n) = (\lambda u_n)$

$(S, +, \cdot)$ est rev (adms)

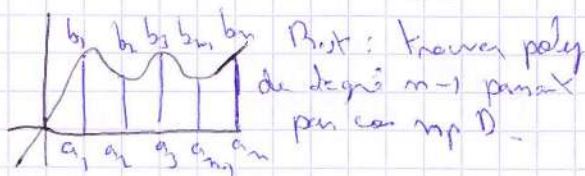
rec simple: $u_{n+1} = f(u_n)$

linéaire: $u_{n+1} = a u_n$ $v_n = a \times u_n$

double $a u_{n+1} + b u_n = c$ pour $n \geq 2$

$F = \{ \text{sol}(A) \}$ f.s. de S

Polynôme d'interpolation de Lagrange



$E = \{ p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg p \leq m-1 \}$ $\dim E = m$

Fin VF car



rd du rang: $\text{rg } Y = \dim \ker Y = \dim E$

neutre est $\vec{0}$ et
 loi semi interne tq $\forall \lambda \in K$
 $\forall \vec{x} \in E \wedge \vec{x} \in E$
 $\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$
 $(\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$

Propriétés:

$\rightarrow$ Si K' s.c. de K , $\forall K$ -ev est aussi un K' -ev.

$\rightarrow 0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$

$\rightarrow (1 + (-1)) \vec{u} = 0 \cdot \vec{u} = \vec{0} = \vec{u} + (-\vec{u})$

$\rightarrow \alpha \cdot \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}$

Exemple d'E.V.:

$\rightarrow \mathbb{R}^2 = \{ \alpha \vec{u} \mid \alpha \in \mathbb{R}, \vec{u} \in \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \} \}$ $\dim = 2$

$\mathbb{R}^2 = \{ \alpha \vec{u} \mid \alpha \in \mathbb{R}, \vec{u} \in \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \} \}$ $\dim = 2$

$S = \{(u_n)\}$ ensemble des suites réelles de terme général est $\mathbb{R}$ -ev.
 avec $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$
 $\lambda \cdot (u_n) = (\lambda u_n)$

$\vec{w} = (x, y, z) = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$
 $= (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')$

Alors $\lambda(x+y-z) - \mu(x'+y'-z') = 0$

$A = \{ (x, y, z) \mid x+y-z=0 \} = \{ x, y, x+y \}$

$A = \{ (x, 0, x) \} + \{ (0, y, y) \} = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1)$

e_1 et e_2 sont génératrices de A

Libre car $\alpha(1, 0, 1) = \beta(0, 1, 1) = (0, 0, 0)$

EV à dim finie: E, K -ev dim m
 $F = \{ \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p \}$ famille libre $B = \{ b_1, \dots, b_m \}$ base
 $\Rightarrow$ complètes $\Rightarrow$ $m-p$ vecteurs

Csq. 1: $\rightarrow$ Toute famille libre de m vecteurs est aussi base de E

$\rightarrow$ Une famille libre de $p < m$ vecteurs n'est pas génératrice de E

$\rightarrow$ toute base a exactement m vecteurs

$\rightarrow$ toute famille libre a au max m vecteurs

$\rightarrow$ Une famille de plus de m est liée

Base de E dim m ss: $\exists \gamma: E \rightarrow K^m$ libre
 $F =$ famille
 $\Rightarrow$ $\dim F = \dim E$

Famille et dépendance:

Soit K ev avec des vecteurs $\vec{u}$
 $F = \{ \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p \}$ famille p vecteurs

combi linéaire: $\forall$ vecteur $\vec{u}_i$ tq $\exists \alpha_i \in K$ tq $\vec{u}_i = \alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_p \vec{u}_p$

les vecteurs $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ sont libre ss: $\alpha_i \vec{u}_i = \vec{0} \Rightarrow \alpha_i = 0$

Si $F = \{ \vec{u}_i \mid 1 \leq i \leq p \}$ n'est pas libre alors F est liée mais linéaire indép. alors $\alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_p \vec{u}_p = \vec{0}$ et $\alpha_i \neq 0$

F est liée ($\Rightarrow$) au moins 1 des vecteurs de F est C-L des autres vecteurs de F .

$R \Rightarrow Q = p$ et Q

$P \Rightarrow Q = Q \Rightarrow P$ catégorisés

4: Dimension - Base Coordonnées

$\rightarrow$ Une famille libre est libre

$\rightarrow$ Une famille liée est pas forcément

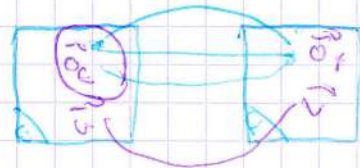
$\rightarrow$ Une sous-famille d'une famille libre est libre

$\rightarrow$ Une famille liée est liée

$\rightarrow$ Une sous-famille contenant $\vec{0}$ est liée

F génératrice de F $F = \text{vect } F$ $\dim F = \dim \mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$ F est base

⑤ Noyau et Image
 Le noyau de φ est $\{\vec{u} : \varphi(\vec{u}) = \vec{0}_F\}$
 est noté $\ker \varphi$



$\ker \varphi$ est sev de E
 car E est K -ev
 $\ker \varphi \subset E$
 $\ker \varphi \neq \emptyset$ car $\vec{0}_E \in \ker \varphi$.

On appelle rang de φ , noté $\text{rg } \varphi$,
 la $\dim$ de $\text{Im } \varphi$.

$$\Rightarrow \text{rg } \varphi = \dim \text{Im } \varphi$$

$$\Rightarrow \text{rg } \varphi \leq \dim E$$

$$\Rightarrow \text{rg } \varphi \leq \dim F$$

φ injective $\Leftrightarrow \ker \varphi = \{\vec{0}_E\}$

$$\Leftrightarrow \dim \ker \varphi = 0$$

φ surjective $\Leftrightarrow \text{rg } \varphi = \dim F$

Th du rang: $\dim \ker \varphi + \text{rg } \varphi = \dim E$

! Chercher 2 solutions linéaires
→ simples (1)

$$U_m = a U_{m-1} + b U_{m-2}$$

Donc $U_m = R^m$ ($m \neq 0$)

$$R^m = a R^{m-1} + b R^{m-2}$$

d'où $R^2 - aR - b = 0$
Eq caract à (1) & (2)