

1

Ch IV Application et Relation

4.1 Def des appli

- on appelle appli d'un ensemble E dans un ensemble F une correspondance qui à tout élément $x \in E$ associe un et un seul élément $y \in F$

On note f cette appli. $f: E \rightarrow F \mid \forall x \in E, \exists! y \in F \mid y = f(x)$

E est l'ensemble de départ. F est l'ensemble d'arrivée. y est l'image de x . x est un antécédent de y .

On note $x \mapsto y \Leftrightarrow y = f(x)$

E est le dom de définition de f .

- Image de E par $f = f(E) = \{y \in F \mid \exists x \in E \mid y = f(x)\}$

- on note $\mathcal{F}(E, F) = \{ \text{appli de } E \text{ dans } F \}$

- 2 applis f et $g \in \mathcal{F}(E, F)$ sont égales ssi $\forall x \in E, f(x) = g(x)$; on note $f = g$

- On appelle identité des E l'appli de E dans E qui à tout x associe x .

On la note $\text{id}_E : \forall x \in E, \text{id}_E(x) = x$

4.2 applications particulières.

4.2.1 Surjection

$f \in \mathcal{F}(E, F)$ est une surjection, on est surjectif,
ssi $f(E) = F$
soit $\forall y \in F, \exists x \in E$ tel que $y = f(x)$

Réponse à Question

Il n'existe aucune surjection de E dans $\mathcal{B}(E)$ (ensemble des parties de E)

6.2.2 Injection

$f \in \mathcal{F}(E, F)$ est ^{une} injection, on est injective
si $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

ou $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

ex: $f \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$ tq $f(x) = 2x + \frac{1}{2}$ f est injective.

6.2.3 Bijection

f est une bijection on est bijective si f est injective et surjective.

$$\Leftrightarrow \forall y \in F, \exists! x \in E \mid y = f(x)$$

donc $\exists f^{-1} \in \mathcal{F}(F, E)$ tq $x = f^{-1}(y)$

f^{-1} est l'application réciproque de f avec $f^{-1}[f(x)] = \text{Id}_E(x)$
 f^{-1} est also bijective

Id_E est bijection de E dans E

• On appelle permutation une bijection de E dans E

Par ex: dans $\mathbb{N}_4^* = \{1, 2, 3, 4\}$

ϕ est une permutation notée $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \phi(1) & \phi(2) & \phi(3) & \phi(4) \end{pmatrix}$ avec $\phi(i) \in \mathbb{N}_4^*$ et $\phi(i) \neq \phi(j)$ si $i \neq j$

ex: $\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\phi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$$\phi_2(\phi_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \neq \phi_1(\phi_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

②

4.2.4 Autres def

- restriction $f: E \rightarrow F$ avec $E \neq \emptyset$
Soit $E' \subset E$ avec $E' \neq \emptyset$
On appelle restriction g de f à E'
notée $g = f|_{E'}$ tq $\forall x \in E' \quad g(x) = f(x)$

- Transposition = permutation de E qui échange 2 éléments de E

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & j & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j & i & \dots & n \end{pmatrix}$$

$$\tau_{ij}(\tau_{ij}) = Id_E$$

ex $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$\tau_{13} \circ \tau_{32}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

toute permutation est produit de transpositions

4.3 Composition d'applications



$$\forall x \in E, \exists! y \in F : y = f(x)$$

$$\forall y \in F, \exists! z \in G : z = g(y) = g[f(x)]$$

$$\text{donc } \forall x \in E, \exists! z \in G : z = h(x)$$

$h \in \mathcal{F}(E, G)$ h est le produit de composition de f par g

$$h = g \circ f$$

→ la composée de 2 surjections est une surjection

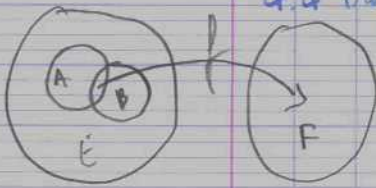
→ la composée de 2 injections est une injection.

$$\text{si } f \in \mathcal{F}(E, E) \text{ tq } f \text{ est involutive} \quad f \circ f = Id_E$$

car: $\mathcal{C}_{ij}$ est involutive

sup/pr est involutive de $\mathbb{R}^2$

Les Propriétés générales



$$A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$$

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

car: $\forall x \in A \cup B$ si $x \in A$ $f(x) \in f(A)$ $f(x) \in f(A) \cup f(B)$
 si $x \in B$ $f(x) \in f(B)$

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

et de plus

$$\text{si } y \in f(A), \exists x \in A \text{ tq } f(x) = y$$

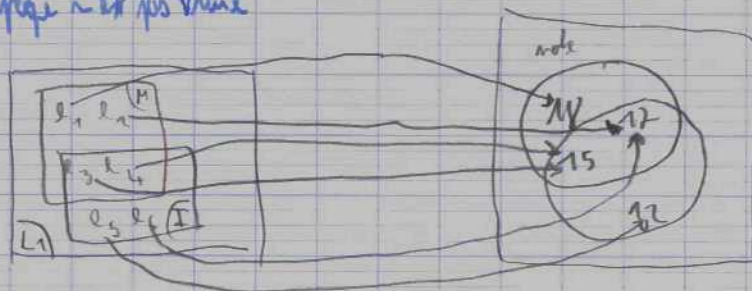
$$\text{si } y \in f(B), \exists x \in B \text{ tq } f(x) = y$$

donc $\exists x \in A \cup B$ tq $y = f(x)$ donc $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

car: $\forall x \in (A \cap B)$, $x \in A$ et $x \in B$ donc $f(x) \in f(A)$ et $f(x) \in f(B)$
 donc $f(x) \in f(A) \cap f(B)$

La réciproque n'est pas vraie



$$f(e_{12}) \in f(M) \cap f(I)$$

$$e_{12} \notin M \cap I$$

3

$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ si f est injective
car si f injective

$$\forall y \in f(A) \cap f(B)$$

$$y \in f(A) \text{ donc } \exists! x \in A \text{ tq } y = f(x)$$

$$y \in f(B) \text{ donc } \exists! x' \in B \text{ tq } y = f(x')$$

$$f \text{ inj} \Rightarrow x = x' \in A \cap B$$

$$f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B) \text{ ou } f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

4.5 Applic^o numériser voir plus loin

4.6 Relations

4.6.1 déf: A et B , 2 ensembles. Soit $G \subset A \times B$

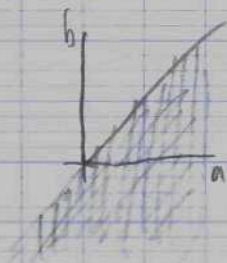
On dit a est relié à b si $(a, b) \in G$

ou note $a R b$

G est le graphe de la relation R

ex: dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$a R b$ si $a \leq b$



ex 2: dans $\mathbb{N}$ $a | b$ si $\exists \lambda \in \mathbb{N}$ tq $b = \lambda a$
 $|$ est la relation divise

2 | 8 mais $8 \nmid 2$

ex 3: dans $\mathbb{R}^2$, l'égalité est une relation $a = b$

- réflexivité

R définie sur E est réflexive si $\forall a \in E, a R a$
 $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est réflexive

- transitivité R est transitive si
 $a R b$ et $b R c \Rightarrow a R c$

"être pilote" n'est pas transitive

"être ami" est transitive

est transitive

car $a | b \Leftrightarrow \exists \lambda_1 \in \mathbb{N} \text{ tq } b = \lambda_1 a$

$b | c \Leftrightarrow \exists \lambda_2 \in \mathbb{N} \text{ tq } c = \lambda_2 b$

donc $c = \lambda_2 \lambda_1 a$ donc $a | c$
 $\mathbb{N}$

- symétrie R est symétrique si $a R b \Rightarrow b R a$

• l'égalité est symétrique

• "avoir la même langue"

- Antisymétrie

R est antisymétrique si $a R b$ et $b R a \Rightarrow a = b$

• l'inclusion de $P(E)$ est antisymétrique.

4.6.2 Relation d'équivalence

R définie sur E est une équivalence si

R réflexive, symétrique et transitive.

alors $x R y$ se note souvent $x \equiv y$ (R)
 ou $x \sim y$

• la similitude des éléments de $\mathbb{N}$ est une équivalence.

ex: congruence des $\mathbb{Z}$ modulo $m \in \mathbb{N}^*$

$a \equiv b \pmod{m}$ si $m \mid (a-b)$

$\equiv$ est une équivalence

Soit $(E, R \text{ équivalence})$ on appelle classe d'équivalence de $x \in E$

notée $\overset{\circ}{x} = \{ a \in E \text{ tq } a R x \}$

$x \equiv y \Rightarrow \overset{\circ}{x} = \overset{\circ}{y}$

l'ensemble des classes d'équivalence des (E, R) est une partition de E .

(4)

4.6.3 Relation d'ordre



R définie sur E est une relation d'ordre
 si R est réflexive, transitive et antisymétrique

E est ordonné par R

- inclusion des $\mathcal{P}(E)$ est un ordre
- $\leq$ des $\mathbb{R}$ est un ordre

$(E, \leq)$ Soit $A \in \mathcal{P}(E)$

- majorant M est majorant de A si $\forall x \in A, x \leq M$
- mineur m est mineur de A si $\forall x \in A, m \leq x$

$\rightarrow A$ admet au plus 1 majorant. (2 au 1 mineur).

on l'appelle alors le plus grand élément de A de $\leq$ par le + petit.

Le plus petit des majorants (s'il existe) est la borne sup de A
 $M \in E$ est maximum des E si $(x \in E \text{ et } M \leq x) \Rightarrow x = M$
 m est minimum des E si $x \in E, \text{ et } x \leq m \Rightarrow x = m$

4.5

Soit $(E, \leq)$ et $(F, \leq')$

$\xrightarrow{\quad} p \in \mathcal{F}(E, F)$

φ est croissante si $\forall (x_1, x_2) \in E^2, x_1 \leq x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) \leq' \varphi(x_2)$

φ est décroissante $\forall (x_1, x_2) \in E^2, x_1 < x_2 \Rightarrow \varphi(x_2) \leq' \varphi(x_1)$

$\varphi \in \mathcal{F}(\mathcal{P}(E), \mathcal{P}(F))$, obtenues par l'inclusion

$\forall A \in \mathcal{P}(E), \varphi(A) = \bar{A} = \bigcup_E A$ φ est décroissante

car $A < B \Rightarrow \bar{B} < \bar{A}$ φ est croissante si elle est à la fois croissante ou décroissante

5. Dénombrabilité

5.1 Cardinal d'un ensemble

- On dit que 2 ensembles A et B sont équipotents ou ont "m même puissance" si $\exists$ bijection entre A et B
ou alors $\text{card } A = \text{card } B$

On dit que $\text{card } A \leq \text{card } B$ si $\exists$ injection de A dans B
 $\rightarrow$ L'équipotence est une relation d'équivalence

$$\rightarrow E \subset F \quad \text{card } E \leq \text{card } F$$

- on pose : $\text{card } \{1, 2, \dots, n\} = n$

- E est fini si $\exists m \in \mathbb{N}$ tq $\text{card } E = m$

- $\text{card}(E \cdot F) = \text{card } E \cdot \text{card } F$ (ensembles finis)

$$\rightarrow \text{card } (A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B - \text{card}(A \cap B)$$

E est dénombrable si $\text{card } E = \text{card } \mathbb{N} = \aleph_0$

$$\mathcal{P} = \{\text{pairs}\} = \{k : \exists p \in p \in \mathbb{N} \text{ tel que } k =$$

$$\text{card } \mathcal{P} = \aleph_0 \quad \text{dk } \aleph_0 = \aleph_0$$

$$\aleph_0 = \aleph_0 + 1$$

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

Car le produit de 2 ensembles dénombrables est dénombrable

Il existe une bijection entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$

$$\text{card } \mathcal{P}(E) = 2^{\text{card } E}$$

Remarque de Cantor : il n'existe pas de bijection entre E et $\mathcal{P}(E)$

d'où $\text{card } E < \text{card } \mathcal{P}(E)$

$$\text{card } \mathbb{N} < \text{card } \mathcal{P}(\mathbb{N}) < \text{card } \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) < \dots$$
$$\aleph_0 \quad \aleph_1 \quad \aleph_2$$

5

$$X_1 = \text{card } \mathbb{R}$$

5.2 Nombre d'applications de E de F

$$E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad F = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$$

Soit $\mathcal{F}(E, F)$

→ $\text{card } \mathcal{F}(E, F) = \text{card } F^{\text{card } E}$

car: d'après p. réc

$$p=d \quad \text{card } \mathcal{F}(E_1, F_m) = m = m^1$$

supposons $\text{card } \mathcal{F}(E_p, F_m) = m^p$

$$E_{p+1} = E_p \cup \{x_{p+1}\}$$

$$\text{card } \mathcal{F}(E_{p+1}, F_m) = \text{card } \mathcal{F}(E_p, F_m) \cdot m = m^p \cdot m = m^{p+1}$$

l'hypothèse est héréditaire, vraie p. $n=1$ donc vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$

5.3 Arrangement

$$E_p = \{e_1, \dots, e_p\} \quad F_m = \{f_1, \dots, f_m\} \quad \text{donc } 0 \leq p \leq m$$

Soit ϕ une injection de E_p dans F_m

Les p images $\phi(e_1), \dots, \phi(e_p)$ sont distinctes. Elles forment une partie ordonnée de p éléments puis puis les m éléments de F_m

(c'est la liste ordonnée sans répétition, on arrange les p premiers puis puis m)

On appelle A_m^p le nb de ces arrangements distincts

$$A_m^p = \text{card } \{ \text{injection de } E_p \text{ dans } F_m \}$$

$$E_p = E_{p-1} \cup \{e_p\}$$

$$A_m^p = A_m^{p-1} \cdot (m - (p-1))$$

$$\begin{aligned}\text{Soit } A_m^p &= (m-p+1) A_m^{p-1} \\ A_m^{p-1} &= (m-p+2) A_m^{p-2} \\ A_m^{p-2} &= (m-1) A_m^{p-1} \\ A_m^1 &= m\end{aligned}$$

$$\heartsuit \left[A_m^p = m(m-1)(m-2) \dots (m-p+1) \right]$$

Cas particulier $p=m$

- nb de bijections de E_m des $E_m = m(m-1) \dots (1) = m!$
- nb de permutations de E_m est $m!$
- $0! = 1$

$$\heartsuit \left[\text{donc } A_m^p = \frac{m!}{(m-p)!} \right]$$

$$\begin{array}{ll} 0! = 1 & 4! = 24 \\ 1! = 1 & 5! = 120 \\ 2! = 2 & \\ 3! = 6 & \end{array}$$

5.4 Combinatoires

une combinaison de p éléments pris parmi m
est une liste des ordres de p éléments pris m
Soit C_m^p le nombre de ces combinaisons.
à toute combinaison correspond $p!$ arrangements

$$C_m^p = \frac{m!}{p!(m-p)!} = \binom{m}{p}$$

$$\left[C_m^m = C_m^0 = 1 \right]$$

$$C_m^0 = 1$$

$$C_m^m = C_{m-1}^{m-1} + C_{m-1}^{m-2}$$

6

triangle de Pascal

$n \uparrow$	0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	2	3	6	10
2	1	2	3	6	10	15
3	1	3	6	10	15	21
4	1	4	6	10	15	21
5	1	5	10	15	21	28

binome de Newton

♥
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n-m} \binom{n}{m} a^m b^{n-m}$$

par récurrence sur n

d'où $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(1+1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$

$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$